8 の字結び目群の SL_2-絶対既約表現の定める Hasse-Weil ゼータ関数について

原田 新也 (九州大学)

Introduction

結び目とは 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$(または 3 次元球面 S^3) 内の単純閉曲線 $\mathcal{K}$ のことであるが, その内結び目補空間 $S^3 \setminus \mathcal{K}$ が 3 次元双曲多様体の構造をもつものを双曲結び目と呼ぶ. 8 の字結び目は双曲結び目の中でただひとつの arithmetic knot であり ([11]), その結び目群は数論的に興味深い性質をもつことが期待される. 本稿では 8 の字結び目群の SL_2-絶対既約表現の同型類の個数の定める Weil 型ゼータ関数及び Hasse-Weil 型ゼータ関数を計算し, それらの数論的な性質と他の結び目不変量との関連についてみる.

1　群の表現の定める Weil 型ゼータ関数

G を有限生成な群, $d \geq 1$ を整数, $q = p^r$ を素数 p のべきとするとき d 次線形表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$ の集合から定まる数列 $(N_{d,n;r})_{n\geq 1}$ を考える. 例えば $N_{d,n;r}$ として d 次線形表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$ の全体の個数などが考えられる. このときべき級数

$$Z_{N,d;r}(G,T) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{d,n;r}}{n} T^n\right)$$

を, 数列 $(N_{d,n;r})_{n\geq 1}$ の定める Weil 型のゼータ関数とよぶことにする. $N_{d,n;r}$ として d 次線形表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$ の全体の個数 $H_{d,n;r}$ をとった場合, 対応する Weil 型のゼータ関数 $Z_{H,d;r}(G,T)$ は有理関数になる. このことは次のようにして分かる: 有限生成な群 G と次数 d に対し, $\mathbb{Z}$ 上有限型なスキーム $X_{G,d}$ が存在し, d 次線形表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$ の全体と $X_{G,d}$ の $\mathbb{F}_{q^n}$-有理点の集合との間に全単射が存在する. よって $Z_{H,d;r}(G,T)$ は合同ゼータ関数 $Z(X_{G,d} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q, T)$ に等しいことが分かる. したがって Dwork により示された合同ゼータ関数の有理性により $Z_{H,d;r}(G,T)$ は有理関数であることが分かる (cf. [5], Theorem 1).

$A_{d,n;r}$ を絶対既約表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$ の $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$-共役類の個数とする. ここで $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n})$ が**絶対既約**であるとは合成 $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{SL}_d(\mathbb{F}_{q^n}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_d(\overline{\mathbb{F}}_{q^n})$ が既約表現であるときをいう ($\overline{\mathbb{F}}_{q^n}$ は $\mathbb{F}_{q^n}$ の代数閉包). 数列 $(A_{d,n;r})_{n\geq 1}$ の定める Weil 型ゼータ関数 $Z_{A,d;r}(G,T)$ に関して次が成り立つ:

Theorem 1.1. $Z_{A,d;r}(G,T)$ は有理関数である.

一般線形群 GL_d への絶対既約表現の同型類を考えた場合にも上記の結果が得られる ([5]). [5] においては, Procesi ([10]) による非可換環の東屋代数への絶対既約表現の同型類のモジュライの理論を用いることで GL_d の場合を証明しているが, SL_d-表現の場合も同様にして示す

ことができる．ここでは中本, 斎藤両氏による ([9]) $\mathbb{Z}$ 上の指標多様体の理論を用いた証明について簡単に述べる．

Proof. [9], Theorem 6.18 により $\mathbb{Z}$ 上分離的, 有限型なスキーム $\mathrm{Ch}_d(G)$ で, 次の性質をもつものが存在する: 任意の代数閉体 Ω に対し, 絶対既約表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_d(\Omega)$ の $\mathrm{GL}_d(\Omega)$-共役類の集合 $\mathrm{Rep}_d(G)(\Omega)/\mathrm{PGL}_d(\Omega)$ と $\mathrm{Ch}_d(G)$ の Ω-有理点の集合との間に全単射が存在する．実は k を有限体, Ω をその代数閉包 $\overline{k}$ とするとき, この全単射は k 上に制限しても成立することが次のようにして分かる (cf. [4], Lemma 2.3.1): Skolem-Noether の定理により $\mathrm{Rep}_d(G)(k)/\mathrm{PGL}_d(k)$ から $\mathrm{Rep}_d(G)(\overline{k})/\mathrm{PGL}_d(\overline{k})$ への自然な写像は単射であるから, 全射性を示せばよい．$\mathrm{Ch}_d(G)(k)$ の任意の元 x に対して, ρ を対応する $\mathrm{Rep}_d(G)(\overline{k})$ の元とする．ガロア群 $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$ の任意の元 σ に対し, ρ へ σ を作用させた表現 $\sigma \cdot \rho \in \mathrm{Rep}_d(G)(\overline{k})$ は x に写るので, ρ と $\sigma \cdot \rho$ は $\mathrm{PGL}_d(\overline{k})$-共役である．よって行列 $A(\sigma) \in \mathrm{PGL}_d(\overline{k})$ で $\sigma \cdot \rho = A(\sigma)\rho A(\sigma)^{-1}$ となるものが一意的に存在する．この対応による写像 $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k) \to \mathrm{PGL}_d(\overline{k})$ は 1-cocycle になる．$H^1(k, \mathrm{PGL}_d(\overline{k})) = 1$ なので, ある行列 $A \in \mathrm{PGL}_d(\overline{k})$ が存在して $\sigma(A)A^{-1} = A(\sigma)$ となる．そこで $\rho' := A^{-1}\rho A$ とすると $\rho' \in \mathrm{Rep}_d(G)(k)$ であり, これが x へうつる表現であることが分かる． □

1.1 Torus 結び目群のゼータ関数

群 G として多様体 X の基本群 $\pi_1(X)$ をとったとき, ゼータ関数 $Z_{N,d;r}(G,T)$ は X の不変量と考えられる．X として結び目 $\mathcal{K}$ の補空間 $S^3 \setminus \mathcal{K}$ を考えた場合, $Z_{N,d;r}(\pi_1(X),T)$ が結び目不変量としてどのような性質をもつかを調べることは興味深い問題であると思われる．結び目群の Weil 型ゼータ関数の計算としては Sink によるものが知られている．ここでは Sink による Torus 結び目群の場合の結果について述べる．

結び目群の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-線形表現から定まる結び目不変量にキャッソン不変量がある．Sink ([14]) は有限体上の線形表現からキャッソン不変量の類似が得られないか, ということを考え, Weil 型のゼータ関数を研究し以下の結果を得た:

Theorem 1.2 (Sink [14], Theorem 2). G を有限表示な群, p を素数とし $N_{2,n;1}$ を 2 次線形表現 $\rho : G \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$-共役類の個数とする．このとき Weil 型ゼータ関数 $Z_{N,2;1}(G,T)$ はある有理関数の平方根になる．

Theorem 1.3 (Sink [14], Theorem 3). a を正の奇数, $p \equiv 1 \pmod 4$ を素数とする．$\mathcal{K}$ を $(a,2)$-型トーラス結び目とし $G_{\mathcal{K}}$ をその結び目群とする．$ND_{n,2;1}$ を対角でない 2 次線形表現 $\rho : G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$-共役類の個数とする．このとき $Z_{ND,2;1}(G_{\mathcal{K}},T)^{-2}$ は円分多項式の積で表される．また関数等式 $Z_{ND,2;1}(G_{\mathcal{K}},T^{-1})^2 = Z_{ND,2;1}(G_{\mathcal{K}},T)^2$ を満たす．

1.2 8 の字結び目群のゼータ関数

以下 $\mathcal{K}$ を 8 の字結び目とし, $G_{\mathcal{K}}$ をその結び目群 $\pi_1(S^3 \setminus \mathcal{K})$ とする．このとき $G_{\mathcal{K}}$ は次の群表示をもつことはよく知られている:

$$G_{\mathcal{K}} = \langle \alpha, \beta \mid R(\alpha,\beta) := \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha = 1 \rangle.$$

ふたつの生成元 α, β は共役であることに注意する．実際 $\delta := \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}$ とすると $\beta = \delta\alpha\delta^{-1}$ が成り立つ．

以下 $G_{\mathcal{K}}$ の 2 次絶対既約表現 $\rho : G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^n})$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^n})$-共役類を統制する指標多様体を計算する. 残念ながら今回得られたものは $\mathbb{Z}$ 上の指標多様体ではなく, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 上の指標多様体というべきものである. まず初めに 2 次特殊線形群 SL_2 の元の関係式についての補題を述べる.

Lemma 1.4 (Trace Identity, cf. [15], §2). $\mathbf{A}$ を可換環とし, A, B, C を $\mathrm{SL}_2(\mathbf{A})$ の元とする. このとき以下の関係式が成り立つ:

1. $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(A^{-1})$.
2. $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B) - \mathrm{Tr}\,(AB^{-1})$.
3. $\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(BC) + \mathrm{Tr}\,(B)\mathrm{Tr}\,(CA) + \mathrm{Tr}\,(C)\mathrm{Tr}\,(AB) - \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)\mathrm{Tr}\,(C) - \mathrm{Tr}\,(ACB)$.

Whittemore は [15] において複素数体上の場合に 8 の字結び目群の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表現の指標多様体を (本質的に) 計算した (cf. [6], Proposition 4.1). 以下のふたつの補題はその際重要な働きをする. [15] においては複素数体上で証明されているが, 実際これらの補題は任意の可換環及び代数閉体上で成立する.

Lemma 1.5 (cf. [15], Lemma 1). $\mathbf{A}$ を可換環とし, A, B を任意の $\mathrm{SL}_2(\mathbf{A})$ の元とするとき $R = R(A,B) := B^{-1}A^{-1}BAB^{-1}ABA^{-1}B^{-1}A$ とおく. また $x := \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$, $z := \mathrm{Tr}\,(AB)$ に対し $f = f(x,z) := x^2 - z - 2$, $g = g(x,z) := z^2 - (1+x^2)z + 2x^2 - 1$ とおく. このとき次の関係式が成り立つ:

1. $\mathrm{Tr}\,(RB) = x$.
2. $\mathrm{Tr}\,(R) - 2 = fg^2$.
3. $\mathrm{Tr}\,(RA^{-1}) - x = x(2-z)fg$.

Lemma 1.6 (cf. [15], Lemma 2). $\mathbf{k}$ を任意の標数の代数的閉体とし, A, B, R を $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ の元とする. $x := \mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$ とする. さらに $\mathrm{Tr}\,(R) = 2$ かつ $\mathrm{Tr}\,(RA) = \mathrm{Tr}\,(RB) = x$ とする. このとき $\mathrm{Tr}\,(AB) \neq 2, x^2 - 2$ ならば R は単位行列である.

Lemma 1.7 (cf. [7], Lemma 2.5 or [3], Lemma 1.5.5). G を 2 元生成な群, $\mathbf{k}$ を代数閉体とし, $\rho : G \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ を表現とする. ρ が可約であるための必要十分条件は $\mathrm{Tr}\,([\rho(\alpha), \rho(\beta)]) = 2$ となることである. ここで $[\rho(\alpha), \rho(\beta)]$ は $\rho(\alpha)$ と $\rho(\beta)$ の交換子である.

$\mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(\mathbf{k})$ を $G_{\mathcal{K}}$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ への絶対既約表現の集合とする. このとき, $\mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(\mathbf{k})$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbf{k})$ による共役作用でわった商集合 $\mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(\mathbf{k})/\mathrm{PGL}_2(\mathbf{k})$ は次のようにかくことができる:

Proposition 1.8. 既約表現 $\rho : G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ に対し $(\mathrm{Tr}\,\rho(\alpha), \mathrm{Tr}\,\rho(\alpha\beta))$ を対応させる写像は $\mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(\mathbf{k})/\mathrm{PGL}_2(\mathbf{k})$ と集合

$$E'(\mathbf{k}) := \left\{(x,z) \in \mathbf{k}^2 \ \middle|\ z^2 - (1+x^2)z + 2x^2 - 1 = 0\right\} \setminus \left\{(\pm\sqrt{5}, 3)\right\}$$

の間の全単射を定める.

Proof. $\rho\colon G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ を任意にとるとき, $A := \rho(\alpha)$, $B := \rho(\alpha\beta)$, $x := \mathrm{Tr}\,(A)$ かつ $z := \mathrm{Tr}\,(B)$ とおく. $C(x,z) := \mathrm{Tr}\,(B^{-1}A^{-1}BA) = 2x^2 + z^2 - x^2 z - 2$ とすると, Lemma 1.7 より ρ が可約であることと $z = x^2 - 2$ または $z = 2$ であることは同値である. よって

$$\{\rho\colon G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})\colon \text{既約}\}/\sim\, = \left\{\rho\colon G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})\colon z \neq x^2 - 2, 2\right\}/\sim$$

である. したがって Lemma 1.5 (2) により, 既約表現 $\rho : G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ に $(\mathrm{Tr}\,(\alpha), \mathrm{Tr}\,(\alpha\beta))$ を対応させることで写像

$$\left\{\rho\colon G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})\colon z \neq x^2 - 2, 2\right\}/\sim\, \longrightarrow E'(\mathbf{k})$$

が得られる. 以下この写像が全単射になることをみる. まず単射であることは, 既約表現の同型類が指標によって決まることから分かる (cf. [9], Theorem 6.12). 次に全射性をみる. 任意の点 $(x,z) \in E'(\mathbf{k})$ に対し以下のような $\mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ の元を考える:

$$A = \begin{pmatrix} a & z - x^2 + 2 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

ここで a は $a + a^{-1} = x$ を満たすような $\mathbf{k}$ の元である. このとき Lemma 1.5 (2), (3) より $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B) = x$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = z$, $\mathrm{Tr}\,(R(A,B)) = 2$ かつ $\mathrm{Tr}\,(R(A,B)A) = x$ が成り立つ. よって Lemma 1.6 により α, β を各々 A, B にうつす表現 $\rho\colon G_{\mathcal{K}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{k})$ が定義でき, Lemma 1.7 より既約であることが分かる. □

代数閉体 $\mathbf{k}$ として $\overline{\mathbb{F}}_p$ をとる. このとき Proposition 1.8 における写像は $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ 作用をこめて同型となる. また

$$\left(\mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(\overline{\mathbb{F}}_p)/\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)\right)^{\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_{p^n})} \simeq \mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(\mathbb{F}_{p^n})/\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$$

であることから次が得られる:

Corollary 1.9. k を有限体とする. このとき $\mathrm{Rep}_2(G_{\mathcal{K}})(k)/\mathrm{PGL}_2(k)$ と

$$E'(k) = \left\{(x,z) \in k^2 \;\middle|\; z^2 - (1+x^2)z + 2x^2 - 1 = 0\right\} \setminus \left\{(\pm\sqrt{5}, 3)\right\}$$

の間に全単射がある.

Lemma 1.10. 代数曲線

$$X^2 - (1+Y^2)X + 2Y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線である. その極小 Weierstrass 方程式は $E : Y^2 = X^3 - 2X + 1$ で与えられる. また E の conductor $N(E)$ は $40 = 2^3 5$ である.

Corollary 1.9 と Lemma 1.10 により次が得られる.

Proposition 1.11. $\mathcal{K}$ を 8 の字結び目, $G_{\mathcal{K}} = \pi_1(S^3 \setminus \mathcal{K})$ をその結び目群とする. p を素数, $q = p^r$ とする. このとき Weil 型ゼータ関数 $Z_{A;r}(G_{\mathcal{K}}, T) := Z_{A,2;r}(G_{\mathcal{K}}, T)$ は以下のように表される:

$$Z_{A;r}(G_{\mathcal{K}}, T) = \begin{cases} Z_{\overline{E}_p;r}(T)(1-T)^2, & p = 2, 5, \\ Z_{\overline{E}_p;r}(T)(1-T)^3, & p \neq 2, 5, \quad \left(\dfrac{5}{p}\right) = 1 \text{ かつ } r \geq 1, \\ Z_{\overline{E}_p;r}(T)(1-T)^3, & p \neq 2, 5, \quad \left(\dfrac{5}{p}\right) = -1 \text{ かつ } 2 \mid r, \\ Z_{\overline{E}_p;r}(T)(1-T)(1-T^2), & p \neq 2, 5, \quad \left(\dfrac{5}{p}\right) = -1 \text{ かつ } 2 \nmid r. \end{cases}$$

ここで E は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線

$$E : Y^2 = X^3 - 2X + 1,$$

$Z_{\overline{E}_p;r}(T)$ は E の mod p reduction $\overline{E}_p$ の合同ゼータ関数

$$Z_{\overline{E}_p;r}(T) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sharp\overline{E}_p(\mathbb{F}_{q^n})}{n} T^n\right),$$

$\left(\dfrac{5}{p}\right)$ はルジャンドル記号である.

2 8の字結び目群の SL_2-絶対既約表現から定まる Hasse-Weil ゼータ関数

Proposition 1.11 を用いて 8 の字結び目群の SL_2-絶対既約表現から定まる $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の Hasse-Weil ゼータ関数を計算する. 任意の有限次代数体上の Hasse-Weil ゼータ関数を定義することは可能であるが (有理数体 $\mathbb{Q}$ など), それらは一般には複素数体 $\mathbb{C}$ 上へ解析接続出来ない. 以下で $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の Hasse-Weil ゼータ関数が $\mathbb{C}$ 上へ解析接続することを示す. $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ は 8 の字結び目にとって意味のある体である. すなわち 8 の字結び目の Alexander 多項式の根を添加した体になっている. 後にみるように, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の Hasse-Weil ゼータ関数は数論的に面白い性質を持つばかりでなく, 8 の字結び目の結び目としての性質を反映していることが期待されるものになっている.

Hasse-Weil ゼータ関数 $\zeta_A(s)$ を次で定義する:

$$\zeta_A(s) := \prod_{\mathfrak{p}} Z_{A;r_{\mathfrak{p}}}(G_{\mathcal{K}}, p^{-r_{\mathfrak{p}}s}).$$

ここで $\mathfrak{p}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\varphi]$, $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$ の 0 でない素イデアルを走る. また $r_{\mathfrak{p}}$ は剰余体 $\mathbb{Z}[\varphi]/\mathfrak{p}$ の $\mathbb{F}_p$ (p は $\mathfrak{p}$ の下にある素数) 上の拡大次数を表す. また Hasse-Weil ゼータ関数 $\zeta_A(s)$ の完備化 $\xi_A(s)$ を次で定義する:

$$\xi_A(s) := \frac{(4\pi)^2(1-2^{-2s})(1-5^{-s})}{\sqrt{5}(2^3\sqrt{5})^s} \times \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)^3 \zeta_A(s).$$

ここで $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Dedekind ゼータ関数を表す. このとき次の結果が得られる:

Theorem 2.1. 関数 $\zeta_A(s)$ 及びその完備化 $\xi_A(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される. また $\xi_A(s)$ は次の関数等式を満たす:

$$\xi_A(2-s) = \xi_A(s).$$

さらに関数 $\xi_A(s)$ は $s=1$ で 0 でなく, その値は以下のようになる:

$$\xi_A(1) = -\frac{(\log(\varphi^2)\mathrm{AGM}(\varphi, \varphi-1))^2}{5}.$$

ここで $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$, $\mathrm{AGM}(\varphi, \varphi-1)$ は φ と $\varphi - 1$ の算術幾何平均を表す.

Remark 2.2. ここで $\xi_A(s)$ の $s=1$ での値と他の結び目不変量との関係について述べる．8 の字結び目 $\mathcal{K}$ の Alexander 多項式 $\Delta_{\mathcal{K}}(T)$ は $\Delta_{\mathcal{K}}(T) = T^2 - 3T + 1$ で与えられる．$\xi_A(1)$ に現れる φ, $\varphi - 1$ は Alexander 多項式の根の平方根になっていることが分かる．また Alexander 多項式の根を $\mathbb{Q}$ に添加した体が $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である．

Remark 2.3. $\xi_A(1)$ に現れる値 $\log(\varphi^2)$ についても以下のように 8 の字結び目のホモロジー群との関係が知られている:

$$\begin{aligned}\log(\varphi^2) &= \log m(\Delta_{\mathcal{K}}(T)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\#H_1(M_n, \mathbb{Z}))}{n}.\end{aligned}$$

ここで $m(\Delta_{\mathcal{K}}(T))$ は Alexander 多項式 $\Delta_{\mathcal{K}}(T)$ の Mahler 測度である, すなわち

$$m(\Delta_{\mathcal{K}}(T)) := \exp\left(\int_0^1 \log|\Delta_{\mathcal{K}}(e^{2\pi\sqrt{-1}t})|dt\right)$$

である．また M_n は 8 の字結び目上分岐する n 次の S^3 の巡回被覆を表す．このことは九州大学の森下先生に教えていただいた.

2.1 楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の L-series

以下では Theorem 2.1 の証明について述べる．証明における鍵は楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の L-series の性質を調べることである．そこでまず楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の L-series の性質についてまとめておく．先にみたように楕円曲線 $E: Y^2 = X^3 - 2X + 1$ の conductor は 40 である．よって E は 2, 5 で bad reduction をもつ．$p = 2, 5$ での E の reduction $\overline{E}_p$ の合同ゼータ関数 $Z_{\overline{E}_p;r}(T)$ は以下のように計算される.

Lemma 2.4. *E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $Y^2 = X^3 - 2X + 1$ とする．E の bad reduction $\overline{E}_2$, $\overline{E}_5$ の合同ゼータ関数は以下のようになる:*

$$\begin{aligned}Z_{\overline{E}_2;r}(T) &= \frac{1}{(1-T)(1-2^rT)}, \\ Z_{\overline{E}_5;r}(T) &= \frac{1}{1-5^rT}.\end{aligned}$$

二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ における素数の分解の様子は以下のようになる: 5 は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ で分岐する唯一の素数である．2 は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ で不分岐であり, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ において分解しない．$p \neq 2, 5$ を素数とするとき, p が $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ で完全分解するための必要十分条件は $\left(\dfrac{5}{p}\right) = 1$ である．したがって楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の L-series は次のようになる (cf. [12] or [13]):

$$L_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) := \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(q_{\mathfrak{p}}^{-s})^{-1}.$$

ここで $\mathfrak{p}$ が素数 p の上にある $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\varphi]$ の 0 でない素イデアルのとき, $\mathfrak{p}$ における剰余体の位数を $q_{\mathfrak{p}} = p^{r_{\mathfrak{p}}}$ とする．また $L_{\mathfrak{p}}(T)$ は次で定義する:

$$L_2(T) := 1, \quad L_{(\sqrt{5})}(T) := 1 - T.$$

また $\mathfrak{p}$ を $p \neq 2, 5$ の上にある $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の素イデアルとするとき,

$$L_{\mathfrak{p}}(T) := \begin{cases} Z_{\overline{E}_p;1}(T)(1-T)(1-pT), & \left(\dfrac{5}{p}\right) = 1, \\ Z_{\overline{E}_p;2}(T)(1-T)(1-p^2T), & \left(\dfrac{5}{p}\right) = -1. \end{cases}$$

$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}E$ を $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の $\mathbb{Q}$ への Weil restriction とすると, これは $E \times E_5$ と $\mathbb{Q}$ 上 isogenous である. ここで E_5 は $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線

$$E_5 : 5Y^2 = X^3 - 2X + 1.$$

[8], Proposition 3 より

$$L_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) = L_{(\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}E)/\mathbb{Q}}(s) = L_{(E \times E_5)/\mathbb{Q}}(s) = L_{E/\mathbb{Q}}(s) L_{E_5/\mathbb{Q}}(s)$$

が成り立つ ($L_{E/\mathbb{Q}}(s)$, $L_{E_5/\mathbb{Q}}(s)$ は各々楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$, $E_5/\mathbb{Q}$ の L-series). 従って $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ を完備 L-series とすれば

$$\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) = \mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(s) \mathcal{L}_{E_5/\mathbb{Q}}(s)$$

である. Modularity Theorem により $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の L-series $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(s)$, $\mathcal{L}_{E_5/\mathbb{Q}}(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続される. よって $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ も $\mathbb{C}$ 上有理型である. Cremona の database より ([2]), 楕円曲線 E, E_5 の Mordell-Weil rank は 0 であることが分かる. よって関数等式 $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2-s) = \mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ が得られる.

2.2 Theorem 2.1 の証明

最後に前節の楕円曲線の L-series の性質から Theorem 2.1 が得られることについて述べる. まず Hasse-Weil ゼータ関数 $\zeta_A(s)$ は楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の L-series を用いて以下のように書ける:

$$\begin{aligned} \zeta_A(s) &= \prod_{\mathfrak{p}} Z_{A, r_{\mathfrak{p}}}(G_{\mathcal{K}}, q_{\mathfrak{p}}^{-s}) \\ &= \frac{(s-1)^2 \xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) \xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s-1)}{\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)} \times \frac{\sqrt{5}(2^3\sqrt{5})^s}{(4\pi)^2 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)^3 (1-2^{-2s})(1-5^{-s})}. \end{aligned}$$

したがって完備 Hasse-Weil ゼータ関数は次のようになる.

$$\xi_A(s) := \frac{(4\pi)^2 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)^3 (1-2^{-2s})(1-5^{-s})}{\sqrt{5}(2^3\sqrt{5})^s} \times \zeta_A(s) = \frac{(s-1)^2 \xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) \xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s-1)}{\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)}.$$

これより $\zeta_A(s)$, $\xi_A(s)$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続し, 関数等式 $\xi_A(2-s) = \xi_A(s)$ を満たすことが分かる. 楕円曲線 E, E_5 は rank が 0 であることより $\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(1) = \mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}}(1)\mathcal{L}_{E_5/\mathbb{Q}}(1) \neq 0$ である. また

$$\lim_{s \to 1}(s-1)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) = \frac{\log(\varphi^2)}{\sqrt{5}}$$

より

$$\lim_{s \to 1}(s-1)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s) = -\lim_{s \to 1}(s-1)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s-1) = \log(\varphi^2),$$

$\varphi := (1+\sqrt{5})/2$ が分かる．楕円曲線の L-series についても, rank 0 であることから E および E_5 の real periods $\Omega(E)$, $\Omega(E_5)$ を用いて

$$L_{E/\mathbb{Q}}(1) = \frac{1}{4}\Omega(E), \quad L_{E_5/\mathbb{Q}}(1) = \frac{1}{2}\Omega(E_5)$$

と書ける．$\Omega(E)$, $\Omega(E_5)$ については, [1], Algorithm 7.4.7 を用いると

$$\Omega(E) = \frac{2\pi}{\mathrm{AGM}(\varphi, \varphi-1)}, \quad \Omega(E_5) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}\mathrm{AGM}(\varphi, \varphi-1)}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}\xi_A(s) &= \lim_{s\to 1}\frac{(s-1)^2\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)\xi_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s-1)}{\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)} \\
&= -\frac{(\log(\varphi^2))^2}{\mathcal{L}_{E/\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(1)} \\
&= -\frac{(\log(\varphi^2)\mathrm{AGM}(\varphi, \varphi-1))^2}{5}.
\end{aligned}$$

謝辞

第 3 回福岡数論研究集会で発表する機会を与えていただきました九州大学の権寧魯先生, 並びにオーガナイザーである九州大学の金子昌信先生, 福岡教育大学の岸康弘先生に感謝致します．また発表時 Proposition 1.11 の間違いを指摘して頂いた九州大学の田口雄一郎先生に御礼申し上げます.

参考文献

[1] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Grad. Texts in Math., **138**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[2] J. E. Cremona, *Algorithms for modular elliptic curves*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] M. Culler and P. B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of* 3-*manifolds*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), 109–146.

[4] T. Fukaya, *Hasse zeta functions of non-commutative rings*, J. Algebra **208** (1998), 304–342.

[5] S. Harada and H. Moon, *On zeta functions of modular representations of a discrete group*, J. Algebra **319** (2008), 4456–4471.

[6] W. Li and W. Qingxue, *An* $\mathrm{SL}(2, C)$ *algebro-geometric invariant of knots*, preprint.

[7] F. Luo, *Characters of* $\mathrm{SL}(2)$ *representations of groups*, J. Differential Geom. **53** (1999), 575–626.

[8] J. S. Milne, *On the arithmetic of abelian varieties*, Invent. Math. **17** (1972), 177–190.

[9] K. Nakamoto, *Representation varieties and character varieties*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 159–189.

[10] C. Procesi, *Deformations of representations*, Methods in ring theory (Levico Terme, 1997), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **198**, Dekker, New York, 1998, 247–276.

[11] A. W. Reid, *Arithmeticity of knot complements*, J. London Math. Soc. (2) **43** (1991), 171–184.

[12] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonctions ẑeta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou: 1969/70.

[13] J.-P. Serre, *Représentations l-adiques*, Algebraic number theory (Kyoto Internat. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Univ. Kyoto, Kyoto, 1976), Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977, 177–193.

[14] J. M. Sink, *A zeta-function for a knot using* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{p^s})$ *representations*, Knots in Hellas '98 (Delphi), Ser. Knots Everything, **24**, World Sci. Publishing, 2000, 452–470.

[15] A. Whittemore, *On representations of the group of Listing's knot by subgroups of* $\mathrm{SL}(2, C)$, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 378–382.