

重さ 1 の保型形式と Galois 表現について

岡本 亮彦 (早稲田大学)

1 序

Dedekind エータ関数 $\eta(\tau)$ は無限積

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \tau \in \mathcal{H}$$

で定義される. ここで, $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ は上半平面を表す. 自然数 N と自然数 e_i に対して, 次のような Dedekind エータ関数の積

$$f(\tau) = \prod_{i|N} \eta(i\tau)^{e_i}$$

をエータ積という. $f(\tau)$ は重さ $\frac{1}{2} \sum_{0 < i|N} e_i$, 指標付きの modular form となる. エータ積の Fourier 係数は, 分割数や二次形式の解の個数といった数論の問題と深くかかわりがある. また, エータ積はその定義から Fourier 係数の計算がしやすく cusp における零点の位数も比較的簡単に計算できるので, modular form や cusp form を具体的に構成するのに都合が良い. 本稿では特に $a + b \equiv 0 \pmod{24}$, $a \mid b$ を満たす自然数 a, b に対し, $\eta(a\tau)\eta(b\tau)$ なる重さ 1 のエータ積を考える. この条件は, エータ積 $\eta(a\tau)\eta(b\tau)$ が重さが 1 で level が ab で Dirichlet 指標 $\chi(d) = \left(\frac{-b/a}{d}\right)$ を持つ modular form であることを意味する. このエータ積を用いて, 重さ 1 の cusp form の空間を調べる事が主目的である. Dummit, Kisilevski, McKay は正規化された Hecke eigenform となるエータ積を一般の $f(\tau) = \prod_{i|N} \eta(i\tau)^{e_i}$ に対して決定している (cf. [3]). それを今回扱う case に対して書くと次の通りである.

定理 1 (Dummit, Kisilevski, McKay [3]). エータ積 $\eta(a\tau)\eta(b\tau)$ が正規化された Hecke eigenform となるのは次の 7 つのみである.

$$\eta(\tau)\eta(23\tau), \eta(2\tau)\eta(22\tau), \eta(3\tau)\eta(21\tau), \eta(4\tau)\eta(20\tau), \eta(6\tau)\eta(18\tau), \eta(8\tau)\eta(16\tau), \eta(12\tau)^2.$$

実は上の 7 つのエータ積はすべて 2 元 2 次形式に付随するテータ級数の差で表される. さらにある虚 2 次体 K と自然数 c が存在し, $\rho : \text{Gal}(K_c/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$ なる dihedral type の 2 次元 Galois 表現に対応する cusp form と一致する. ここで K_c は虚 2 次体 K の導手 c の整環 O_c の ring class field である. それぞれのエータ積に対し K, c は次のように取れる.

エータ積	level	虚 2 次体 K	導手 c	$\text{Gal}(K_c/K)$
$\eta(\tau)\eta(23\tau)$	23	$\mathbf{Q}(\sqrt{-23})$	1	C_3
$\eta(2\tau)\eta(22\tau)$	44	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11})$	2	C_3
$\eta(3\tau)\eta(21\tau)$	63	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$	3	C_4
$\eta(4\tau)\eta(20\tau)$	80	$\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$	2	C_4
$\eta(6\tau)\eta(18\tau)$	108	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$	6	C_3
$\eta(8\tau)\eta(16\tau)$	128	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$	4	C_4
$\eta(12\tau)^2$	144	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$	6	C_4

すると L 関数の間の関係式

$$L(f, s) = L(\rho, s) = L_K(\chi, s)$$

を得る. ここで $L(f, s)$ はエータ積 $f(\tau) = \eta(a\tau)\eta(b\tau)$ の保型 L 関数, $L(\rho, s)$ は Artin- L 関数, $L_K(\chi, s)$ は Hecke- L 関数で, χ は $\rho = \text{Ind}_{\text{Gal}(K_c/K)}^{\text{Gal}(K_c/\mathbf{Q})}(\chi)$ を満たす $\text{Gal}(K_c/K)$ のある 1 次表現である. また以下のような 2 元 2 次形式のペア

$$Q_1 : 6ax^2 + axy + y^2, \quad Q_2 : 6ax^2 + 5axy + (a+1)y^2$$

を考え, それぞれに付随するテータ級数を $\vartheta_{Q_1}(\tau), \vartheta_{Q_2}(\tau)$ とし, 各 ρ に対応する cusp form を g で表すと

$$\eta(a\tau)\eta(b\tau) = \frac{1}{2}(\vartheta_{Q_1}(\tau) - \vartheta_{Q_2}(\tau)) = g \quad (1)$$

が成立する. 上の 7 つのエータ積は Hecke eigenform であり, 無限遠で展開したときの Fourier 展開の先頭項が 1 となる. これは a, b の条件で書くと $a+b=24$ となる. そこで次のような問題を考える.

問題 1. 関係式 (1) と類似の式が $a+b=24k, k \geq 2$ に対しても成立するか?

一方で Serre は [13] において次の例を挙げている. p を $p+1 \equiv 0 \pmod{24}$ を満たす素数とする. 判別式が $-p$ の 2 元 2 次形式のペア

$$Q_1 : 6x^2 + xy + \frac{p+1}{24}y^2, \quad Q_2 : 6x^2 + 5xy + \frac{p+25}{24}y^2$$

に対して

$$\eta(\tau)\eta(p\tau) = \frac{1}{2}(\vartheta_{Q_1}(\tau) - \vartheta_{Q_2}(\tau))$$

が成立する. これは関係式 (1) のエータ積とテータ級数に関する部分の一般化と言える.

この事に関連して次の予想を立てた.

予想 1. 判別式が $-ab$ の 2 元 2 次形式のペア

$$Q_1 : 6ax^2 + axy + \frac{a+b}{24}y^2, \quad Q_2 : 6ax^2 + 5axy + \left(a + \frac{a+b}{24}\right)y^2$$

に対して

$$\eta(a\tau)\eta(b\tau) = \frac{1}{2}(\vartheta_{Q_1}(\tau) - \vartheta_{Q_2}(\tau))$$

が成立する.

さて本稿の主結果は次の通りである.

主定理. level (2 元 2 次形式の判別式の値の絶対値) が square-free のとき, 予想 1 は正しい.

さらに, 2 次元 GLois 表現に対応する cusp form を用いてこの場合の関係式 (1) とその類似の式をいくつか導く. また, Siegel の定理から同じ genus に含まれる 2 次形式のテータ級数の差は cusp form になるが, その cusp form のエータ積を用いた具体的な構成についても考える.

2 主定理の証明

まずエータ積と2次形式に付随するテータ級数についてよく知られてる事実と後で使うものをまとめておく. エータ積について一般の形で準備をする.

命題 1 (cf. [3], [7]). エータ積 $f(\tau) = \prod_{0 < i | N} \eta(i\tau)^{e_i}$ が性質

1. $\sum_{0 < i | N} i e_i \equiv 0 \pmod{24}$,
2. $\sum_{0 < i | N} \frac{N}{i} e_i \equiv 0 \pmod{24}$

を満たすとする. このとき $f(\tau)$ は任意の $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \chi(d)(c\tau + d)^k f(\tau)$$

を満たす (これを $f(\tau)|[\gamma]_k = \chi(d)f(\tau)$ と表す). ただし $k = \frac{1}{2} \sum_{0 < i | N} e_i$ である.

エータ積 $\eta(a\tau)\eta(b\tau)$ が重さが1で level が ab で, Dirichlet 指標 $\chi(d) = \left(\frac{-b/a}{d}\right)$ を持つ modular form である事は, この命題から従う.

次に $f(\tau)$ の $\Gamma_0(N)$ の cusp における零点の位数を計算する. まず, $\Gamma_0(N)$ の cusp の代表 \mathcal{C}_N は

$$\mathcal{C}_N = \left\{ \frac{a}{c} \in \mathbf{Q} ; c | N, 1 \leq a \leq N \text{ gcd}(a, N) = 1 \right\}$$

と取れる. ただし $\frac{a}{c}, \frac{a'}{c} \in \mathcal{C}_N$ に対し, $a \equiv a' \pmod{\text{gcd}(c, \frac{N}{c})}$ を満たすならば同じ cusp を表す.

命題 2 (cf. [9]). cusp の代表 $\frac{a}{c}$ ($\text{gcd}(a, c) = 1$) に対しその零点は

$$\nu_{\frac{a}{c}} = \frac{h_c}{24} \sum_{0 < i | N} \frac{\text{gcd}(i, c)^2}{i} e_i,$$

と書ける. ここで, $h_c = \frac{N}{\text{gcd}(c^2, N)}$ は cusp $\frac{a}{c}$ の幅である.

2次形式について準備する. 正定値整数係数の r 変数2次形式

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x} A^t \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^r a_{ij} x_i x_j \quad (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r), A \in M_r(\mathbf{Z}))$$

を考える. ここで, 行列 A は2次形式 Q に対応する正定値で対称な偶行列 (対角成分が偶数の行列) である. この2次形式 Q に付随するテータ級数を

$$\vartheta_Q(\tau) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^r} q^{Q(\mathbf{x})}$$

で定義する. 以下では, r を偶数とし $r = 2k$ とおく. このとき次が成立する.

命題 3 (Schoeneberg [12]). 上の notation のもとで

$$\vartheta_Q(\tau) \in \mathcal{M}_k(N, \chi)$$

が成立する. ここで N は NA^{-1} が偶行列となるような最小の自然数 N で, χ は $\chi(d) = \left(\frac{-1}{d}\right)^k \frac{\det A}{d}$ なる指標である. つまり $\vartheta_Q(\tau)$ は重さが k で level が N で指標が χ となる modular form である.

主定理の証明. まず N は square-free であるから $\Gamma_0(N)$ の cusp の代表は

$$\mathcal{C}_N = \left\{ \frac{1}{l} : l|N \right\}$$

と書ける. 任意の $\frac{1}{l} \in \mathcal{C}_N$ に対し, $\eta(\tau)\eta(N\tau)$ の cusp $\frac{1}{l}$ での零点の位数は命題 2 より

$$\nu_{\frac{1}{l}} = \frac{N + l^2}{24l}$$

と計算できる.

次に $\vartheta_{Q_1}(\tau), \vartheta_{Q_2}(\tau)$ の cusp における零点の位数を計算する. そのためにテータ級数の一般の $SL_2(\mathbf{Z})$ の元における変換公式を利用する (cf. [11], p.189). cusp $\frac{1}{l}$ に対して, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ とおくと, $\gamma\infty = \frac{1}{l}$ を得る.

さて $A_1 = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & \frac{N+1}{12} \end{pmatrix}$ とおいて, $\vartheta_{A_1}(\tau) = \vartheta_{Q_1}(\tau)$ に γ を作用させると,

$$\vartheta_{A_1}(\tau)|[\gamma]_1 = (\det A_1)^{-\frac{1}{2}} l^{-1} (-i) \sum_{\substack{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \\ A_1 \mathbf{m} \equiv 0 \pmod{N}}} \Phi(\mathbf{m}) \vartheta(\tau; A_1, \mathbf{m}, N)$$

を得る. ここで $\vartheta(\tau; A_1, \mathbf{m}, N)$ と $\Phi(\mathbf{m})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau; A_1, \mathbf{m}, N) &= \sum_{\substack{\mathbf{x} \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \\ \mathbf{x} \equiv \mathbf{m} \pmod{N}}} q^{\frac{Q_1(\mathbf{x})}{N^2}}, \\ \Phi(\mathbf{m}) &= \sum_{\substack{\mathbf{g} \in (\mathbf{Z}/lN\mathbf{Z})^2 \\ \mathbf{g} \equiv 0 \pmod{N}}} e\left(\frac{1}{lN^2} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{g} A_1^t \mathbf{g} + \mathbf{m} A_1^t \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{m} A_1^t \mathbf{m} \right\}\right) \end{aligned}$$

である. よって, $\vartheta_{A_1}(\tau)|[\gamma]_1$ を q_{h_l} 展開 ($q_{h_l} = q^{\frac{1}{h_l}}$) すると

$$\vartheta_{A_1}(\tau)|[\gamma]_1 = (\det A_1)^{-\frac{1}{2}} l^{-1} (-i) \sum_{\substack{\mathbf{m} \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2 \\ A_1 \mathbf{m} \equiv 0 \pmod{N}}} \Phi(\mathbf{m}) q_{h_l}^{\frac{Q_1(\mathbf{m})h_l}{N^2}}$$

となる. $\vartheta_{Q_2}(\tau)$ に対しても同様に q_{h_l} 展開できる. 次の補題より $\vartheta_{A_1}(\tau)$ と $\vartheta_{A_2}(\tau)$ の q_{h_l} の冪の取りうる最小の値は丁度 $\nu_{\frac{1}{l}}$ であることが分かる.

補題.

$$\begin{aligned} \min\left\{ \frac{Q_1(\mathbf{m})h_l}{N^2} : \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2, A_1 \mathbf{m} \equiv \mathbf{0} \pmod{N} \right\} &\geq \frac{N + l^2}{24l}, \\ \min\left\{ \frac{Q_2(\mathbf{m})h_l}{N^2} : \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2, A_2 \mathbf{m} \equiv \mathbf{0} \pmod{N} \right\} &\geq \frac{N + l^2}{24l}. \end{aligned}$$

Proof. $\mu_1 = \mu_1(\mathbf{m}) = \frac{Q_1(\mathbf{m})h_l}{N^2}$ とおく. このとき 2 次形式

$$6x^2 + xy + \left(\frac{N+1}{24}y^2 - \frac{\mu_1 N^2}{h_l}\right) = 0$$

は整数解 \mathbf{m} を持つ. この式を x についての 2 次方程式と見て判別式 D を計算すると

$$\begin{aligned} D &= y^2 - 24\left(\frac{N+1}{24}y^2 - \frac{\mu_1 N^2}{h_l}\right) \\ &= N(-y^2 + 24\mu_1 l) \end{aligned}$$

は平方数でなければならない. 今仮定より N は square-free なので, ある奇数 α と自然数 s が存在して

$$-y^2 + 24\mu_1 l = N^\alpha s^2$$

と書ける. これを書き直すと

$$\begin{aligned} y^2 &= 24\mu_1 l - N^\alpha s^2 \\ &= l(24\mu_1 - h_l N^{\alpha-1} s^2) \end{aligned}$$

であり, k は N の約数より平方因子を含まないのである奇数 β と自然数 t が存在して

$$24\mu_1 - h_l N^{\alpha-1} s^2 = l^\beta t^2$$

と書ける. したがって

$$\mu_1 = \frac{h_l N^{\alpha-1} s^2 + l^\beta t^2}{24} \geq \frac{h_l + l}{24} = \frac{N + l^2}{24l}$$

を得る. Q_2 に対しても同様にして示せる. □

主定理の証明に戻る. 任意の合同部分群 Γ に対して, 重さが 0 の modular forms は定数以外に存在しないという事実に注意すると (cf. [9]), 補題より

$$\frac{\vartheta_{Q_1}(\tau) - \vartheta_{Q_2}(\tau)}{\eta(\tau)\eta(N\tau)} \in \mathcal{M}_0(\Gamma_0(N)). \quad (2)$$

であるから, ある定数 $c \in \mathbf{C}$ が存在して $\vartheta_{Q_1}(\tau) - \vartheta_{Q_2}(\tau) = c\eta(\tau)\eta(N\tau)$ と書ける. 両辺の係数を比較する事で $c = 2$ となり主定理を得る. □

3 具体例

この節では主定理を具体的な数値で確かめると同時に, 主定理のエータ積やテータ級数が属する重さ 1 の cusp form の空間について考察する. まずこの節で用いる 2 次元の Glois 表現について必要な事をまとめておく. (cf. [1], [5], [13]).

有理数体 \mathbf{Q} に対し, 絶対 Galois 群を $G_{\mathbf{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ で表す. Weil, Langlands, Deligne, Serre らにより $G_{\mathbf{Q}}$ の既約で odd な 2 次元線形表現 $\rho : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{C})$ と重さ 1 の cusp form との間には L 関数を通じて 1 : 1 対応がある.

以下で考察するのは, 虚 2 次体に付随する dihedral type の表現である. 具体的には, 既約かつ odd で Artin 導手が $c(\rho) = mc^2$ で $\rho(G_{\mathbf{Q}})$ が一般 2 面体群 (Abel 群と位数 2 の群の半直積) であ

るような $\rho: G_{\mathbf{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbf{C})$ を考える. このとき $\ker \rho$ の固定体は虚 2 次体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ の導手 c の整環 O_c の ring class field K_c に含まれる. よって, ρ は $Gal(K_c/\mathbf{K}) \cong C(O_c) \cong H(-mc^2)$ のある 1 次表現 χ の誘導表現となる. つまり $\rho = \text{Ind}_{Gal(K_c/K)}^{Gal(K_c/\mathbf{Q})}(\chi)$ とかける. ここで $C(O_c)$ は整環 O_c のイデアル類群で, $H(-mc^2)$ は判別式 $-mc^2$ の primitive な正定値 2 元 2 次形式のなす群 (cf. [2]) である. この状況の下では ρ に対応する cusp form は具体的に表す事ができる.

定理 2 (cf. [1]). 上の notation のもとで $\rho: Gal(K_c/\mathbf{Q}) \rightarrow GL_2(\mathbf{C})$ に対し cusp form g を

$$g(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{Q \in H(-mc^2)} \chi(Q) \vartheta_Q(\tau)$$

とおくと, $g(\tau) \in S_1(mc^2, \chi_{-m})$ で $L(\rho, s) = L(g, s)$ が成り立つ. ここで $L(\rho, s)$ と $L(g, s)$ はそれぞれ, Artin-L 関数と保型 L 関数である.

つまり上のような ρ に対応する cusp form は 2 元 2 次形式に付随するテータ級数の 1 次結合で表す事ができる.

では具体例を見ていく.

1. $S_1(95, \chi_{-95})$

まず $H(-95)$ の元をすべて求めると

$$H(-95) = \begin{cases} R_0: x^2 + xy + 24y^2 \\ R_1: 2x^2 + xy + 12y^2 \\ R_2: 4x^2 + xy + 6y^2 \\ R_3: 3x^2 + xy + 8y^2 \\ R_4: 5x^2 + 5xy + 6y^2 \\ R_5: 3x^2 - xy + 8y^2 \\ R_6: 4x^2 - xy + 6y^2 \\ R_7: 2x^2 - xy + 12y^2 \end{cases}$$

となる.

ここで R_0 は $H(-95)$ の単位元で, R_1 は $H(-95)$ の生成元, そして $R_i = R_1^i$ となっている. 主定理の 2 次形式のペア

$$Q_1: 6x^2 + xy + 4y^2, \quad Q_2: 6x^2 + 5xy + 5y^2$$

はそれぞれ R_6 と R_4 に $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値, すなわち, ある $SL_2(\mathbf{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して $Q_1(x, y) = R_6(ax + by, cx + dy)$ となる (Q_2 と R_4 に対しても同様である). このとき主定理より

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_6}(\tau) - \vartheta_{R_4}(\tau)) = \eta(\tau)\eta(95\tau) \in \mathcal{S}_1(\Gamma_0(95), \chi_{-95}) \quad (3)$$

が成り立つ.

次に Glois 表現との関係を見る. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-95})$, $c = 1$ として既約かつ odd で Artin 導手が $c(\rho) = -95$ なる Glois 表現 $\rho: Gal(K_c/\mathbf{Q}) \rightarrow GL_2(\mathbf{C})$ を考える. 今 $Gal(K_c/\mathbf{Q}) \cong D_{16}$ より既約な 2 次元表現は 3 個あり, それらを $\rho_i = \text{Ind}_{Gal(K_c/K)}^{Gal(K_c/\mathbf{Q})}(\chi_i)$, $\chi_i(R_1) = \zeta_8^i$ とおく ($i = 1, 2, 3$). このとき定理 2 より, ρ_i に対応する cusp form は

$$g_i = \frac{1}{2} \sum_{R \in H(-95)} \chi_i(R) \vartheta_R(\tau)$$

と表せる. (3) で得られた表示を g_i を用いて表すと

$$\frac{1}{4}(g_1 - 2g_2 + g_3) = \frac{1}{2}(\vartheta_{R_6} - \vartheta_{R_4}) = \eta(\tau)\eta(95\tau) \quad (4)$$

と書ける.

これより, $\eta(\tau)\eta(95\tau)$ は虚 2 次体に付随する dihedral type の cusp form の一次結合でも書けることが示された.

以下では, $H(-95)$ の他の 2 次形式から得られるテータ級数について考察していく. まず 2 元 2 次形式の genus についての定義を思い出しておく. 2 元 2 次形式 R_i と R_j が同じ genus であるとは, R_i と R_j はすべての素数 p において \mathbf{Z}_p 上同値かつ \mathbf{R} 上同値であると言う事だった. 2 次形式のなす群 $H(-95)$ は 2 つの genus から成り立ち, genus で分類すると

$$H(-95) = \{R_0, R_2, R_4, R_6\} \cup \{R_1, R_3, R_5, R_7\}$$

となる (2 元 2 次形式の genus やその個数については [2] を参照). Siegel により同じ genus に含まれる 2 次形式 R_i と R_j に対し, $\vartheta_{R_i} - \vartheta_{R_j}$ は cusp form になることが知られている (一般に n 変数の正定値 2 次形式で成立する cf. [14]). $H(-95)$ の元に対して同じ genus に含まれる 2 次形式のテータ級数の差で作られる cusp form の具体的な表示を求めると以下のようになる:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(g_1 - 2g_2 + g_3) &= \frac{1}{2}(\vartheta_{R_2} - \vartheta_{R_4}) = \eta(\tau)\eta(95\tau), \\ \frac{1}{4}(g_1 + 2g_2 + g_3) &= \frac{1}{2}(\vartheta_{R_0} - \vartheta_{R_2}) = \eta(\tau)\eta(95\tau) \mid U_5 = \eta(5\tau)\eta(19\tau), \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(g_1 - g_3) &= \frac{1}{2}(\vartheta_{R_1} - \vartheta_{R_3}) = -\eta(\tau)\eta(95\tau) \mid T_3, \\ \frac{1}{2}(g_1 + g_3) &= \frac{1}{2}(\vartheta_{R_0} - \vartheta_{R_4}) = -\eta(\tau)\eta(95\tau) \mid T_6. \end{aligned}$$

ここで U_p ($p \mid N$), T_p ($p \nmid N$) は Hecke 作用素で素数 p と $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ に対し,

$$\begin{aligned} f \mid U_p &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} q^n, \\ f \mid T_p &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} q^n + \chi(p) p^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{pn} \end{aligned}$$

と定義される. T_6 については $T_2 T_3 = T_6$ をもとに計算した.

$\vartheta_{R_1} = \vartheta_{R_7}, \vartheta_{R_2} = \vartheta_{R_6}, \vartheta_{R_3} = \vartheta_{R_5}$ に注意すると, この 4 つで $H(-95)$ の同じ genus に含まれる 2 次形式のテータ級数の差全てを網羅している. これらの関係式は次の命題を用いて示せる.

命題 4. $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi)$ とする. このとき $0 \leq n \leq \frac{kN}{12} \prod_{p \mid N} (1 + \frac{1}{p})$ なる n で $a_n = 0$ ならば $f = 0$ である.

この命題により Fourier 係数を比較して等式を示すことができる.

さて今得られた関係式が他の level の場合にもできないか, と考えるのは自然なことである. 具体的には次のような問題が挙げられる.

問題 2. 虚 2 次体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ の導手 c の整環 O_c において, その 2 次形式の群 $H(-mc^2)$ の同じ genus に含まれる任意の元 Q_1, Q_2 に対し, テータ級数の差 $\vartheta_{Q_1}(\tau) - \vartheta_{Q_2}(\tau)$ は $\eta(c\tau)\eta(mc\tau) \mid T_n$ と表されるか?

虚 2 次体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ のイデアル類群が巡回群の場合をいくつか調べたところ level の低い場合に対しては, 問題 2 の肯定的な解答が得られたのでそれを紹介して終えたい.

2. $S_1(47, \chi_{-47})$

$$H(-47) = \begin{cases} R_0 : x^2 + xy + 12y^2 \\ R_1 : 2x^2 + xy + 6y^2 \\ R_2 : 3x^2 + xy + 4y^2 \\ R_3 : 3x^2 - xy + 4y^2 \\ R_4 : 2x^2 - xy + 6y^2, \end{cases}$$

$H(-47) = \{R_0, R_1, R_2, R_3, R_4\}$: 全て同じ genus に含まれる,

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_1} - \vartheta_{R_2}) = \eta(\tau)\eta(47\tau),$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_0} - \vartheta_{R_2}) = \eta(\tau)\eta(47\tau) \mid T_2,$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_0} - \vartheta_{R_1}) = -\eta(\tau)\eta(47\tau) \mid T_4.$$

3. $S_1(119, \chi_{-119})$

$$H(-119) = \begin{cases} R_0 : x^2 + xy + 30y^2 \\ R_1 : 5x^2 - xy + 6y^2 \\ R_2 : 2x^2 - xy + 15y^2 \\ R_3 : 3x^2 + xy + 10y^2 \\ R_4 : 4x^2 + 3xy + 8y^2 \\ R_5 : 6x^2 + 5xy + 6y^2 \\ R_6 : 4x^2 - 3xy + 8y^2 \\ R_7 : 3x^2 - xy + 10y^2 \\ R_8 : 2x^2 + xy + 15y^2 \\ R_9 : 5x^2 + xy + 6y^2, \end{cases}$$

$H(-119) = \{R_0, R_2, R_4, R_6, R_8\} \cup \{R_1, R_3, R_5, R_7, R_9\}$,

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_1} - \vartheta_{R_5}) = \eta(\tau)\eta(119\tau),$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_1} - \vartheta_{R_3}) = \eta(\tau)\eta(119\tau) \mid T_2,$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_2} - \vartheta_{R_4}) = -\eta(\tau)\eta(119\tau) \mid T_3,$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_2} - \vartheta_{R_0}) = \eta(\tau)\eta(119\tau) \mid T_6,$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_0} - \vartheta_{R_4}) = -\eta(\tau)\eta(119\tau) \mid U_7.$$

4. $S_1(135, \chi_{-15})$

$$H(-135) = \begin{cases} R_0 : x^2 + xy + 34y^2 \\ R_1 : 2x^2 + xy + 17y^2 \\ R_2 : 4x^2 + 3xy + 19y^2 \\ R_3 : 5x^2 + 5xy + 8y^2 \\ R_4 : 4x^2 - 3xy + 19y^2 \\ R_5 : 2x^2 - xy + 17y^2, \end{cases}$$

$$H(-135) = \{R_0, R_2, R_4\} \cup \{R_1, R_3, R_5\},$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_1} - \vartheta_{R_3}) = \eta(3\tau)\eta(45\tau),$$

$$\frac{1}{2}(\vartheta_{R_0} - \vartheta_{R_2}) = \eta(3\tau)\eta(45\tau) \mid T_2 = \eta(9\tau)\eta(15\tau).$$

謝辞

主定理の証明のアイデアについて貴重なご示唆を頂きました伊吹山先生に深く感謝致します。

参考文献

- [1] J. A. Antoniadis, Diedergruppe und Reziprozitätsgesetz, *J. Reine Angew. Math.* **377** (1987), 197–209.
- [2] D. Cox, *Primes of the Form $x^2 + ny^2$* , Fermat, Class Field Theory and Complex Multiplication, second edition, Wiley, 1997.
- [3] D. Dummit, H. Kisilevski and J. McKay, Multiplicative eta-products, *Contemp. Math.* **45** (1985), 89–98.
- [4] F. Diamond and J. Shurman, *A First Course in Modular Forms*, GTM **228**, Springer-Verlag, 2004.
- [5] G. Frey, *Construction and arithmetical applications of modular forms of low weight*, CRM Proc. and Lecture Notes **4**, 1993.
- [6] G. Frey (Ed.) *On Artin’s conjecture for odd 2-dimensional representations*, Springer Lect. Notes Math, **1585**, 1994.
- [7] B.Gordon, D.Sinor, Multiplicative properties of eta-products, *Springer Lect. Note Math* **1395**, (1987), 173–200.
- [8] T. Ibukiyama, Positivity of Eta Products—a Certain Case of K.Saito’s Conjecture, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **41** (2005), 683–693.
- [9] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, second edition, GTM **97**, Springer-Verlag, 1993.
- [10] Y. Martin, Multiplicative η -quotients. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 4825–4856.

- [11] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, 1989.
- [12] A. Ogg, *Modular Forms and Dirichlet Series*, Benjamin, 1969.
- [13] J. P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, In: *Algebraic Number Fields: L -functions and Galois properties*, 193–268, Academic Press, 1977.
- [14] 清水英男, 保型関数 II, 岩波講座 基礎数学.