ゼータマーラー測度と超幾何関数

赤塚 広隆 (東京工業大学)

1　序

本稿の目的はマーラー測度の一般化の一つであるゼータマーラー測度を新たに導入し, ゼータマーラー測度を超幾何関数および一般超幾何関数で表す例をいくつか報告することである. 最初に, 本研究の動機を述べるためにマーラー測度について復習する.

定義 (マーラー測度). 多変数ローラン多項式 $f(X_1, \ldots, X_r) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し, マーラー測度 $m(f)$ を次で定義する:[1]

$$m(f) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log|f(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})| dt_r \cdots dt_1.$$

(多変数多項式に対する) マーラー測度は, 超越数論における多項式の height, length の評価のために Mahler [M] により導入された.[2] マーラー測度は数論のみならず, 力学系, トポロジーなど様々な分野に現れる量である. 本稿に関連することとして次の問題を考える:

問題. 与えられたローラン多項式 f に対し, $m(f)$ を適当な関数の特殊値を用いて表示せよ.

まず, f が一変数多項式のときはこの問題に対して一般的な解答を与えることができる. 即ち, 多項式 $f(X) \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ が

$$f(X) = a \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j)$$

と因数分解されたとき,[3] 関数論でよく知られた Jensen の公式から

$$m(f) = \log|a| + \sum_{j=1}^{n} \log^+ |\alpha_j| \tag{1}$$

が従う. ここで, $\log^+ x := \max\{\log x, 0\}$ である. また, $f(X) \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し $m(X^k f) = m(f)$ が成り立つことに注意すると, f が一変数ローラン多項式のときもマーラー測度は式 (1) と類似の表示式を持つことが分かる.

しかしながら, f が多変数ローラン多項式のときは一変数の場合とは異なり, 問題に対する一般的な答えは知られていない. その代わりに, 具体的に与えられた多項式に対するマーラー測度が種々の関数を用いて計算されている. 下の例はその一部である:

[1] 本来は $m(f)$ を対数的マーラー測度, $M(f) := \exp(m(f))$ をマーラー測度と呼ぶ. 本稿では主に $m(f)$ を扱うため, $m(f)$ を単にマーラー測度と言うことにする.

[2] 一変数多項式に対するマーラー測度は, Mahler とは異なる動機から, 式 (1) の形で Mahler 以前に Lehmer [Leh] により考察されている.

[3] マーラー測度を扱うとき, 不定元と固定された定数を区別する必要がある. 本稿では, 不定元を大文字で, 固定された定数を小文字で表すことにする.

例 1.1. (1) [S]

$$m(X+Y+1)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(2,\chi_{-3})=L'(-1,\chi_{-3}).$$

ここで, χ_{-3} は導手 3 のディリクレ指標, $L(\cdot,\chi_{-3})$ は χ_{-3} に付随するディリクレ L 関数である.
(2) [S]

$$m(X+Y+Z+1)=\frac{7}{2\pi^2}\zeta(3)=-14\zeta'(-2).$$

ここで, $\zeta(\cdot)$ はリーマンゼータ関数である.
(3) $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ と実数 $c\geq r$ に対し,[4]

$$m(X_1+\cdots+X_r+c)=\log c.$$

(4) [B, D] (予想)[5]

$$m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1)\overset{?}{=}\frac{15}{4\pi^2}L(2,E)=L'(0,E).$$

ここで, E は $X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1=0$ の射影閉包により定義される楕円曲線, $L(\cdot,E)$ は E に付随する L 関数である.
(5) [RV] $c>4$ に対し,

$$m(X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+c)=\log c-\frac{2}{c^2}{}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1\\ & 2 & 2 & 2\end{matrix};\frac{16}{c^2}\right).$$

ここで,

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1 & \cdots & a_p\\ b_1 & \cdots & b_q\end{matrix};z\right):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

は一般超幾何関数, $(a)_n:=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号である.

上で述べたような多変数多項式に対するマーラー測度の計算は Smyth [S] により始まった. その後, Deninger [D] の数論幾何による研究, Boyd [B] の数値的な考察などがなされている. また, [La, Oy, V] など, 具体的に与えられた多項式に対するマーラー測度の計算も多数行われている.

上の例のように, 多変数ローラン多項式に対するマーラー測度にはゼータ関数, L 関数の特殊値が現れたり, 初等関数のみで表示されたりとさまざまな関数が現れる. 本稿では, マーラー測度と特殊関数の関係をより広い視野から捕らえる試みの一つとして, マーラー測度の一般化であるゼータマーラー測度を新たに導入する. また, いくつかの具体的なローラン多項式に対するゼータマーラー測度と特殊関数の関係についての結果を紹介する.

2 ゼータマーラー測度とその基本性質

定義 (ゼータマーラー測度). $f(X_1,\ldots,X_r)\in\mathbb{C}[X_1^{\pm 1},\ldots,X_r^{\pm 1}]\setminus\{0\}$ に対し, ゼータマーラー測度 $Z(s,f)$(s は複素パラメータ) を以下で定義する:

$$Z(s,f):=\int_0^1\cdots\int_0^1|f(e^{2\pi i t_1},\ldots,e^{2\pi i t_r})|^s dt_r\cdots dt_1. \tag{2}$$

[4] 式 (1) を繰り返し使うことで容易に示される.

[5] Deninger [D] は Beilinson 予想の仮定の下, $\overset{?}{=}$ の両辺の比が 0 でない有理数になることを示した. Boyd [B] は, 数値的な考察により比が 1 になることを予想した. また, Rodriguez-Villegas [RV, §15] は, $f(X,Y)=X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+c(c^2\in\mathbb{Z}_{>0})$ のマーラー測度と曲線 $f(X,Y)=0$ に付随する L 関数の適当な微分値が無条件に一致する c の例をいくつか挙げている.

ローラン多項式 f が r 次元単位トーラス $\mathbb{T}^r := \{(z_1,\dots,z_r) \in \mathbb{C}^r : |z_1| = \cdots = |z_r| = 1\}$ 上で 0 を取らないとき, 積分 (2) は $s \in \mathbb{C}$ 上広義一様絶対収束し, $Z(s,f)$ は整関数となる. 一方, f が $\mathbb{T}^r$ 上で 0 を取るときは, 積分 (2) は特異積分となる. この場合, $|f|$ が小さい値を取る $\mathbb{T}^r$ の部分集合を解析することで, $\delta = \delta(f) > 0$ が存在して積分 (2) は $\mathrm{Re}(s) > -\delta$ 上広義一様絶対収束し, $\mathrm{Re}(s) > -\delta$ で $Z(s,f)$ が正則であることが分かる. そして, f が $\mathbb{T}^r$ 上で 0 を取るとき, 取らないときいずれの場合にも

$$\frac{dZ}{ds}(0,f) = m(f) \tag{3}$$

が成立し, ゼータマーラー測度はマーラー測度の一般化と言うことができる.

ゼータマーラー測度はいくつかのマーラー測度の性質を保つ. その性質を述べるために記号を準備する. $f(X_1,\dots,X_r) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}]$ が

$$f(\underline{X}) = \sum_{\underline{n}=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^r} c(\underline{n})\underline{X}^{\underline{n}}$$

と表されていたとする. ここで, $\underline{X} = (X_1,\dots,X_r)$ であり, $\underline{n} = (n_1,\dots,n_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対し $\underline{X}^{\underline{n}} := X_1^{n_1}\cdots X_r^{n_r}$ である. このとき, $A \in M_r(\mathbb{Z}) \cap GL_r(\mathbb{Q})$ に対し, $f^{(A)}(\underline{X}) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}]$ を次で定義する:

$$f^{(A)}(\underline{X}) := \sum_{\underline{n}=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^r} c(\underline{n})\underline{X}^{\underline{n}A}.$$

ここで, $\underline{n}A$ は通常の行列の積である. また, $\sigma_0(f)$ を

$$\sigma_0(f) := \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(e^{2\pi i t_1},\dots,e^{2\pi i t_r})|^\sigma dt_r \cdots dt_1 < \infty\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

で定義する. このとき, 本節冒頭で述べたことから, 任意の $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}] \setminus \{0\}$ に対し $\sigma_0(f) < 0$ が成立する. 以上の記号の下, ゼータマーラー測度は次の性質を持つ:

命題 2.1. $f(X_1,\dots,X_r) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm1},\dots,X_r^{\pm1}] \setminus \{0\}$ とする. このとき,
(1) 任意の $a \in \mathbb{C}^\times$ と $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0(f)$ に対して,

$$Z(s,af) = |a|^s Z(s,f).$$

(2) 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0(f)/k$ に対して,

$$Z(s,f^k) = Z(ks,f).$$

(3) 任意の $A \in M_r(\mathbb{Z}) \cap GL_r(\mathbb{Q})$ と $\mathrm{Re}(s) > \max\{\sigma_0(f), \sigma_0(f^{(A)})\}$ に対して,

$$Z(s,f^{(A)}) = Z(s,f).$$

注 2.2. 上で述べた性質は, それぞれマーラー測度の $m(af) = \log|a| + m(f)$, $m(f^k) = km(f)$, $m(f^{(A)}) = m(f)$ に対応する性質である. また, マーラー測度の性質に対応するゼータマーラー測度の性質が存在しないものもある. 例えば, マーラー測度の被積分関数の形から従う性質 $m(fg) = m(f) + m(g)$ に対応するゼータマーラー測度の性質は一般には存在しない. (なお, $f = g$ のときは命題 2.1(2) が対応する性質である.)

本節の最後に, ゼータマーラー測度と関連するマーラー測度の類似物を簡単に紹介する. 本研究によるゼータマーラー測度の研究と同時期に, 黒川–Lalín–落合 [KLO] により, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $f(X_1, \ldots, X_r) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ に対し

$$m_k(f) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\log |f(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_r})|)^k dt_r \cdots dt_1$$

で定義される高次マーラー測度が導入されている. [KLO] でも注意されているとおり, ゼータマーラー測度と高次マーラー測度の間には,

$$Z(s, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k(f)}{k!} s^k \tag{4}$$

なる関係式が成立する. いくつかの具体的なローラン多項式に対しこの関係が何に相当しているのかについては次節で言及する.

3　主結果

一変数ローラン多項式 $X - a (a \in \mathbb{C})$, $X + X^{-1} + c (c \geq 0)$ および二変数ローラン多項式 $X + X^{-1} + Y + Y^{-1} + c (c > 4)$ のゼータマーラー測度が, ガウスの超幾何関数および一般超幾何関数を用いて表示できることを示した (定理 3.1, 定理 3.4, 定理 3.6).

定理 3.1. $a \in \mathbb{C}$ とする. このとき,
(1) $|a| > 1$ のとき, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(s, X - a) = |a|^s F\left(-\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}; 1; |a|^{-2}\right).$$

ここで, $F = {}_2F_1$ はガウスの超幾何関数である.
(2) $|a| = 1$ のとき, $\mathrm{Re}(s) > -1$ に対して

$$Z(s, X - a) = 2^s \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

(3) $|a| < 1$ のとき, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$Z(s, X - a) = F\left(-\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}; 1; |a|^2\right).$$

注 3.2. この結果は, 式 (1) の特殊な場合である

$$m(X - a) = \log^+ |a| \tag{5}$$

に対応する結果である. 定理 3.1 よりこの式を再証明することができる. 例えば, $|a| < 1$ のとき, 定理 3.1(3) より,

$$\begin{aligned} Z(s, X - a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s/2)_n^2}{(n!)^2} |a|^{2n} \\ &= 1 + \frac{s^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{s}{2} + 1)_{n-1}^2}{(n!)^2} |a|^{2n} \\ &= 1 + (s^2\text{次以上の項}) \end{aligned} \tag{6}$$

と $s=0$ のまわりでテイラー展開できる. s の係数は 0 だから, 式 (3) より $m(X-a)=\frac{dZ}{ds}(0,X-a)=0$ が従う. $|a|\geq 1$ の場合も, 定理 3.1 から $\frac{dZ}{ds}(0,X-a)$ を計算することで式 (5) を再証明することができる.

注 3.3. 黒川–Lalín–落合 [KLO] は, 反復積分を用いる方法, 定理 3.1(2) を用いる方法それぞれから高次マーラー測度 $m_k(X-1)$ の計算を行っている. 彼らは

$$m_2(X-1)=\frac{\pi^2}{12},\quad m_3(X-1)=-\frac{3\zeta(3)}{2},$$
$$m_4(X-1)=\frac{19}{240}\pi^4,\quad m_5(X-1)=-\frac{15\zeta(2)\zeta(3)+45\zeta(5)}{2}$$

などを得た. また, 一般的には, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し $m_k(X-1)\in\langle\zeta(b_1)\cdots\zeta(b_h)|h\geq 1, b_j\in\mathbb{Z}_{\geq 2}, b_1+\cdots+b_h=k\rangle_{\mathbb{Q}}$ が成り立つことを示した.

定理 3.1 および多重ポリログ関数の適当な和が作る母関数に関する大野–Zagier [OZ] の結果から, $|a|\neq 1$ の場合についても $m_k(X-a)$ を多重ポリログ関数を用いて表示することが可能である. これを説明するため, まず, 大野–Zagier の結果 (の帰結) を簡単に述べる. [OZ, p.485] より, $|t|<1$ と $|\alpha|\ll 1$ に対し次が従う:

$$F(\alpha,\alpha;1;t)=1+\alpha^2\sum_{\substack{n,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ n\geq s}}2^{n-s}\left(\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,2\}^n\\ \#\{i:\varepsilon_i=2\}=s}}L_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,2)}(t)\right)\alpha^{n+s}. \tag{7}$$

ここで, $L_{(b_1,\dots,b_h)}(t)$ は次の級数により定義される多重ポリログ関数である:

$$L_{(b_1,\dots,b_h)}(t):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_h}\frac{t^{n_h}}{n_1^{b_1}\cdots n_h^{b_h}}.$$

例えば $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$, $|a|<1$ のとき, 定理 3.1(3), 式 (4), 式 (7) より,

$$\begin{aligned}m_k(X-a) &= (-1)^k k!\sum_{\frac{k}{2}-1\leq n\leq k-2}\frac{1}{2^{2(k-n-1)}}\sum_{\substack{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,2\}^n\\ \#\{i:\varepsilon_i=2\}=k-n-2}}L_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,2)}(|a|^2)\\ &\in \langle L_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,2)}(|a|^2)|n\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\varepsilon_j\in\{1,2\},\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n+2=k\rangle_{\mathbb{Q}}\end{aligned}$$

を得る. 上では多重ポリログ関数と超幾何関数の間の関係式 (7) から $m_k(X-a)$ の表示式を導いたが, $f(X)=X-a$ の場合, 式 (4) は式 (7) に対応していると見ることもできる.

定理 3.4. $c\geq 0$ とする. このとき,
(1) $c>2$ のとき, $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$Z(s,X+X^{-1}+c)=|\alpha_c|^s F(-s,-s;1;|\beta_c|^2).$$

ここで, $\alpha_c(<-1)<\beta_c(<0)$ は $X+X^{-1}+c=0$ の根である.
(2) $\mathrm{Re}(s)>-1/2$ に対して

$$Z(s,X+X^{-1}+2)=4^s\pi^{-1/2}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)}.$$

(3) $0 \le c < 2$ のとき, $\mathrm{Re}(s) > -1$ に対して

$$\begin{aligned} Z(s, X+X^{-1}+c) &= \frac{1}{2\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{3}{2})} \left((2-c)^{s+\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; s+\frac{3}{2}; \frac{2-c}{4}\right) \right. \\ &\qquad \left. + (2+c)^{s+\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; s+\frac{3}{2}; \frac{2+c}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

注 3.5. 定理 3.4 は

$$m(X+X^{-1}+c) = m(X^2+cX+1) = \begin{cases} \log|\alpha_c| & c \ge 2 \text{ のとき}, \\ 0 & 0 \le c < 2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{8}$$

に対応する表示式である. $c \ge 2$ のときは, 注 3.2 と同様, 定理 3.4(1), (2) から式 (8) を再現できる. また, $c \ge 2$ のときは注 3.3 と同様に, 式 (7) から高次マーラー測度をリーマンゼータ関数, 多重ポリログ関数を用いて表示することができる. しかしながら, 定理 3.4(3) では超幾何関数を級数表示したときにパラメータ s が分母に現れるため, $s = 0$ におけるテイラー展開の計算が他の場合と比べて困難になる. そのため, $0 \le c < 2$ の場合, 定理 3.4 から式 (8) を再証明することは現在のところできていない. 参考までに, $0 \le c < 2$ のとき, 定理 3.4(3) から $m(X+X^{-1}+c) = \frac{dZ}{ds}(0, X+X^{-1}+c)$ を可能な限り計算・整理した式に式 (8) を適用して得られる等式を以下に記しておく:[6]

$$\begin{aligned} & (2+c)^{1/2} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ 0\le m\le n}} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!(n+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})} \left(\frac{2+c}{4}\right)^n \\ + \; & (2-c)^{1/2} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ 0\le m\le n}} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!(n+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})} \left(\frac{2-c}{4}\right)^n \\ = \; & 4\pi\log 2 + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2+c}}{2}\right)\log(2+c) + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{2-c}}{2}\right)\log(2-c). \end{aligned}$$

なお, 定理 3.4 の c に関する場合分けは, $X + X^{-1} + c = 0$ の単位トーラス $\mathbb{T}^1$ 上の根の個数に関係している. 即ち, $c \ge 0$ のとき,

$$\begin{aligned} c > 2 &\iff X+X^{-1}+c = 0 \text{ は } \mathbb{T}^1 \text{ 上に根を持たない}, \\ c = 2 &\iff X+X^{-1}+c = 0 \text{ は } \mathbb{T}^1 \text{ 上に重根を一つ持つ}, \\ 0 \le c < 2 &\iff X+X^{-1}+c = 0 \text{ は } \mathbb{T}^1 \text{ 上に異なる二つの根を持つ} \end{aligned}$$

が成立する.

定理 3.6. $c > 4$ のとき, $s \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ:

$$Z(s, X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+c) = c^s {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{s}{2}, \frac{-s+1}{2}; 1, 1; \frac{16}{c^2}\right).$$

[6] 逆に, この等式を定理 3.4(3) および式 (8) を経由しないで示すことができれば, 定理 3.4(3) から式 (8) を再現できたことになる.

注 3.7. 定理 3.6 は例 1.1(5) に対応する式であり, 注 3.2 と同様にして, 定理 3.6 から例 1.1(5) を再証明することができる. また, $c > 4$ の場合, $X + X^{-1} + Y + Y^{-1} + c = 0$ は $\mathbb{T}^2$ 上に根を持たない. 一方, $0 \leq c \leq 4$ の場合, $X + X^{-1} + Y + Y^{-1} + c = 0$ は $\mathbb{T}^2$ 上に根を持つ. そのため, $0 \leq c \leq 4$ の場合, 定理 3.6 ほど簡明な式は得られていない. 現在のところ, $c \geq 0$ に対し成り立つ式として, 次の超幾何関数の積分による表示式を得ている:

$$Z(s, X + X^{-1} + Y + Y^{-1} + c) = \frac{2^{2s}}{\pi} \int_0^2 \left| t + \frac{c-4}{4} \right|^s F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; t(2-t)\right) dt. \tag{9}$$

例 1.1(4) を考えると, $c = 1$ の場合が重要であるが, 式 (9) から例 1.1(4) に直接関係することは今のところ得られていない. ただ, 式 (9) より

$$\lim_{s \downarrow -1} Z(s, X + X^{-1} + Y + Y^{-1} + 1) = +\infty$$

を示すことができ, s の関数としては $Z(s, X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1)$ と $L(s, E)$(E は $X+X^{-1}+Y+Y^{-1}+1=0$ の射影閉包で定義される楕円曲線) は異なることが分かる.

注 3.8. 筆者 [A] は式 (9) を経由して定理 3.6 の証明を行った. [RV] による例 1.1(5) の証明法を用いる別手法により, 黒川–Lalín–落合 [KLO] も独立に定理 3.6 を得ている.

定理 3.1, 定理 3.4, 定理 3.6 はいずれも古典的な超幾何関数の理論 (超幾何関数の積分表示, 変換公式など; 例えば [Lev, Chapter 9] で述べられている程度のこと) を用いることにより証明される. 詳細は [A] をご覧いただきたい.

謝辞

今回, 講演の機会を与えてくださった第 3 回福岡数論研究集会の主催者である金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生に深く感謝申し上げます.

参考文献

[A] H. Akatsuka, Zeta Mahler measures, preprint, April 2008.

[B] D. Boyd, Mahler's measure and special values of L-functions, Experiment. Math. **7** (1998) 37–82.

[D] C. Deninger, Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbb{Z}^n$-actions, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997) 259–281.

[KLO] N. Kurokawa, M. Lalín and H. Ochiai, Higher Mahler measures and zeta functions, Acta Arith. **135** (2008) 269–297.

[La] M. Lalín, Some examples of Mahler measures as multiple polylogarithms, J. Number Theory **103** (2003) 85–108.

[Leh] D. H. Lehmer, Factorization of certain cyclotomic functions, Ann. of Math. (2) **34** (1933) 461–479.

[Lev] N. N. Lebedev, Special functions and their applications, Dover Publications (1972) 308 pp.

[M] K. Mahler, On some inequalities for polynomials in several variables, J. London Math. Soc. (2) **37** (1962) 341–344.

[OZ] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, Indag. Math. (N.S.) **12** (2001) 483–487.

[Oy] H. Oyanagi, Differential equations for Mahler measures, J. Ramanujan Math. Soc. **18** (2003) 181–194.

[RV] F. Rodriguez Villegas, Modular Mahler measures. I, Topics in number theory (University Park, PA, 1997) 17–48, Math. Appl. **467**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1999.

[S] C. J. Smyth, On measures of polynomials in several variables, Bull. Australian Math. Soc. **23** (1981) 49–63. Corrigendum (with G. Myerson), Bull. Australian Math. Soc. **26** (1982) 317–319.

[V] S. Vandervelde, A formula for the Mahler measure of $axy + bx + cy + d$, J. Number Theory **100** (2003) 184–202.