Iterated integral and non-commutative modular symbols —— survey of recent Y.I.Manin's paper

井原 健太郎 (POSTECH)

1 Introduction

この原稿では Manin による最近の論文「Iterated integrals of modular forms and noncommutative modular symbols [1]」,「Iterated Shimura integrals [2]」の内容を部分的ながら紹介したい.

Manin は両論文の中で楕円カスプ形式の周期積分を反復積分化してその性質を調べている. $SL_2(\mathbf{Z})$ の合同部分群 Γ に関する重さ k の楕円カスプ形式を $f(z)$ とするとき, f の Mellin 変換

$$\int_{i\infty}^{0} f(z)z^{s-1}dz$$

は, f と その保型 L-関数 $L(f,s)$ とを関係付け, L-関数の性質 (例えば解析接続や関数等式) を与える有効な方法であるし, $s=1,\dots,k-1$ での値は L-関数の臨界点での特殊値を記述する大切な量である. ここで積分路は, カスプ $i\infty, 0$ を結ぶ上半平面 $\mathbf{H}$ の測地線である (積分の収束のために無難に測地線を選んでいる). これを次のように反復積分の形に一般化した '反復 Mellin 変換' が考察されている. まず, $f_i, (i=1,\dots,n)$ をそれぞれ重さ k_i の Γ に関するカスプ形式とし, カスプ $a,b\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ を繋ぐ測地線の途中に, 中間点 $z_1,z_2,\dots,z_n$ を設け, 反復積分

$$\int_a^b f_1(z_1)z_1^{s_1-1}dz_1\int_a^{z_1} f_2(z_2)z_2^{s_2-1}dz_2\cdots\int_a^{z_{n-1}} f_n(z_n)z_n^{s_n-1}dz_n$$

を考える. この積分は $f_1,\dots,f_n$ の順序には依るが, 中間点の取り方には依らずに定まる.

少し単純化して次の設定を考えよう. 任意のリーマン面の単連結開集合 U 上の正則 1-微分形式の組 $\omega_V=(\omega_v)$, ($v\in V$, V は有限集合) と $a,b\in U$ を固定する. その組から適当に微分形式を選んで反復積分

$$I_a^b(\omega_{v_1},\dots,\omega_{v_n})=\int_a^b\omega_{v_1}(z_1)\int_a^{z_1}\omega_{v_2}(z_2)\cdots\int_a^{z_{n-1}}\omega_{v_n}(z_n),\quad (v_i\in V)$$

を考える. この積分は選んだ微分形式の組 $(\omega_{v_1},\dots,\omega_{v_n})$ に依るが, 全ての組合わせを考え (n も動く) 次の様に母関数化する.

$$J_a^b(\omega_V)=1+\sum_{n\geq 1}\ \sum_{(v_1,\dots,v_n)\in V^n} I_a^b(\omega_{v_1},\dots,\omega_{v_n})A_{v_1}\cdots A_{v_n}\in\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle.$$

但し, $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ は, $A_V=\{A_v\mid v\in V\}$ を変数とする非可換巾級数環である. 当論文を一読すると, 単独の反復積分を見るだけでは得られない性質が, この母関数の言葉でこそ美しく記述されることが分かる.

論文では, このRiemann面上の微分形式の反復積分とその母関数の持つ一般的性質を調べ, その特別な形として, 保型形式の組の反復Mellin変換やその特殊値の様々な性質を調べている. 内容を(大雑把に)箇条書きすると,
(i) 正則微分の反復積分の母関数(上記)が満たす一般的な基本性質(group-like性, 積分路の結合性, 変数変換)
(ii) カスプ形式の反復Mellin変換の母関数の関数等式
(iii) 反復Mellin変換に対応する L-関数(多重Dirichlet級数)の特殊値とそのシャッフル積
(iv) カスプ形式の反復積分の母関数の群コホモロジー的解釈, 古典的なカスプ形式の周期理論との類似
(v) ある反復積分の母関数へのHecke作用
(vi) 第3種微分形式の反復積分とassociatorの一般化
この原稿では, 主に(i)-(iv)の内容を紹介したいと思う. (全部の内容を書けなくてすみません).

Maninのこの研究は, 近年の多重ポリログや多重ゼータ値の研究, 及びDrinfel'dによるquasi-Hopf代数の理論の中に現れるKZ方程式のモノドロミーの研究などに触発されたものである. 多重ポリログ関数は, 正整数 $\forall n_i$ に対し次の級数あるいは反復積分で定義される(c.f. [8],[20]):

$$Li_{(n_1,\ldots,n_r)}(z) := \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{n_1} m_2^{n_2} \cdots m_r^{n_r}} = \int_0^z \omega_1(z_1) \int_0^{z_1} \omega_2(z_2) \cdots \int_0^{z_{n-1}} \omega_n(z_n).$$

但し, $n = \sum_{i=1}^r n_i$ で, $\omega_i(z)$ は $i = n_j + \cdots + n_r$ $(j = 1, \ldots, r)$ に対しては $dz/(1-z)$ それ以外は dz/z である. 級数, 積分ともに単位円内 $|z| < 1$ で収束し解析関数を定める. (積分表示から $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ への(多価)解析接続もできる) 更に $n_r > 1$ の場合は $z = 1$ での極限が存在し極限値は多重ゼータ値と呼ばれる. 多重ポリログ(ゼータ)の非可換母関数は, 時代を少し遡って, Drinfel'dの一連の量子群の研究の中に登場していた. Drinfel'dの考察した形式的KZ方程式とは非可換巾級数環 $\mathbf{C}\langle\langle A_0, A_1\rangle\rangle$ 値関数 $G(z)$ の満たす次の微分方程式である:

$$\frac{d}{dz}G(z) = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1}\right) G(z).$$

この方程式は $0, 1, \infty$ に確定特異点があり $z = 0, 1$ の周りの基本解が本質的に多重ポリログの母関数であり, その接続係数(Drinfel'd associatorと呼ばれている)は, 多重ゼータ値の母関数になっている. Drinfel'dはこの基本解やassociatorの性質を微分方程式の持つ幾何的性質を用いて深く研究したのである(c.f.[7],[10],[4]).

この原型を元に, Maninは, $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の設定を上半平面 $\mathbf{H} \cup \{\text{cusps}\}$ の設定へと推し進めていると見なせる.

2 Iterated integrals of holomorphic 1-forms

この節では, 一般的にリーマン面上の正則微分形式の反復積分を考え, その母関数(非可換巾級数)の満たす基本性質を述べる. この節の事実は基本的で重要なものである.

X を任意のリーマン面(compactでなくてもいい), U をその開集合とする. $\mathcal{O}_X$, Ω_X^1 でそれぞれ X 上の正則関数と正則1-微分形式の層を表し, $\mathcal{O}_X(U), \Omega_X^1(U)$ でそれぞれ U 上の正則関数のなす環, 正則1-形式のなす $\mathcal{O}_X(U)$- 加群を表すとする. 更に V を有限集合(添え字

の集合) とし, 不定元 A_v, $v \in V$ が $\mathbf{C}$ 上生成する非可換巾級数環を $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ と表すことにする. 関数 $f : U \to \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ を与えることは,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n} f_{v_1,v_2,\ldots,v_n}(z) A_{v_1}\cdots A_{v_n}$$

($n = 0$ の項は巾級数の定数項と思う) と表わせることから, (非可換の) 単項式 $A_{v_1}A_{v_2}\cdots A_{v_n}$ の係数に当たる $\mathbf{C}$-値関数の族 $f_{v_1,v_2,\ldots,v_n} \in \mathcal{O}_X(U)$ を与えることと同値である. 各 $f_{v_1,v_2,\ldots,v_n}$ が U 上正則のとき f は U 上正則であるとし, その全体を $\mathcal{O}_X(U)\langle\langle A_V\rangle\rangle$ と表す. 同様に, $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$-値の U 上の正則 1-形式

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n} \omega_{v_1,v_2,\ldots,v_n} A_{v_1}\cdots A_{v_n}$$

($\omega_{v_1,v_2,\ldots,v_n} \in \Omega^1_X(U)$) を考え, その全体を $\Omega^1_X(U)\langle\langle A_V\rangle\rangle$ とする. このとき次の自然な完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)\langle\langle A_V\rangle\rangle \xrightarrow{d} \Omega^1_X(U)\langle\langle A_V\rangle\rangle.$$

ここでは $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ を U 上の定数関数の空間とみて, d は, 通常の外微分 $d : \mathcal{O}_X(U) \to \Omega^1_X(U)$ を係数毎に施す射である. d が Leibniz 則を満たすこともすぐわかる.

定義 1 (正則微分の反復積分). U を X の単連結開集合とする. U 上の正則 1-形式の組 $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$ と $a, z \in U$ に対し,

$$I^z_a(\omega) = I^z_a(\omega_1,\ldots,\omega_n) := \int_a^z \omega_1(z_1) \int_a^{z_1} \omega_2(z_2)\cdots \int_a^{z_{n-1}} \omega_n(z_n)$$

と定める. この積分は $\omega_1,\ldots,\omega_n$ の順序には依るが, U の単連結性から a, z を繋ぐ積分路の取り方には依らない.

定義 2 (反復積分の非可換母関数). U を X の単連結開集合とする. U 上の正則 1-形式の組 $\omega_V = (\omega_v)$, ($v \in V$, V は有限集合) に対し, $\Omega = \sum_{v\in V} \omega_v A_v \in \Omega^1_X(U)\langle\langle A_V\rangle\rangle$ と定義する. このとき, $a, z \in U$ に対し,

$$\begin{aligned} J^z_a = J^z_a(\omega_V) &= 1 + \sum_{n\geq 1} \int_a^z \Omega(z_1) \int_a^{z_1} \Omega(z_2)\cdots \int_a^{z_{n-1}} \Omega(z_n) \qquad (1) \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n} I^z_a(\omega_{v_1},\ldots,\omega_{v_n}) A_{v_1}\cdots A_{v_n} \end{aligned}$$

と定める. z を変数とすると, $J^z_a \in \mathcal{O}_X(U)\langle\langle A_V\rangle\rangle$ と見なせる.

この母関数 J^z_a が当論文の主役である. ω_V が適当な性質を持つとき, この元 J^z_a がその性質をどう反映するか? という視点で以下の結果を眺めるといいと思う. この設定でのリーマン面 X は, 後に上半平面 $\mathbf{H}$ と想定されるが, Mellin 変換のようなカスプを繋ぐ積分路での積分は, カスプが $\mathbf{H}$ の境界にあるので広義積分を考える必要があり, 正確には上の設定に当てはまらない. しかし, カスプ形式に因んだ微分形式の積分を考える場合は, カスプ条件により, 広義積分は収束し, 以下の結果はそのまま成立する.

次の命題によって J^z_a という元が, 微分方程式による強い拘束を受けていることがわかる.

命題 1. 上の定義の記号の下,

(i) 微分方程式 $dJ_a^z = \Omega(z)J_a^z$ が成立つ．幾何的に見ると J_a^z は $\mathcal{O}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ 上の平坦接続 $\nabla_\Omega = d - \Omega$ の水平切断である: $\nabla_\Omega J_a^z = 0$.

(ii) この方程式の解空間は, 階数 1 の自由 (右) $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$-加群である．つまり任意の解 K^z は, ある'定数' $C \in \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ について $K^z = J_a^z C$ の形をしている．特に, $a, b, z \in U$ に対し $J_b^z = J_a^z J_b^a$ が成立つ.

Proof. (i) は (1) に d を施すと直. (ii) は $d((J_a^z)^{-1}K^z) = 0$ が計算で確かめられる．(非可換の世界なので商の微分は　$d(J^{-1}) = -J^{-1}d(J)J^{-1}$ に注意) □

次の主張のために $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ に入るある代数構造について簡単に述べる．$\mathcal{U} = \mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ とし，2 つの射, (余積射) $\Delta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}\widehat{\otimes}\mathcal{U}$, (余単位射) $\varepsilon : \mathcal{U} \to \mathbf{C}$ を $\Delta(A_v) = 1 \otimes A_v + A_v \otimes 1$, $\varepsilon(A_v) = 0$ を代数射として拡張して定める．これらの射で $\mathcal{U}$ は双代数になり,

$$\mathcal{L} = \{F \in \mathcal{U} \mid \Delta(F) = 1 \otimes F + F \otimes 1, \varepsilon(F) = 0\},$$
$$\Pi = \{F \in \mathcal{U} \mid \Delta(F) = F \otimes F, \varepsilon(F) = 1\}$$

と定めると, $\mathcal{L}, \Pi$ はそれぞれ, リー環, 群の構造を持つことが示せ, それぞれの元は Lie 元, group-like 元と呼ばれる．$\mathcal{L}$ と Π は指数・対数射により全単射に対応しており, $\mathcal{L}$ は A_V で生成される完備自由リー環であることが知られている (e.g. [3], [14]).

命題 2. $a, z \in U$ に対して,

(i) (group-like 性) $\Delta J_a^z = J_a^z \otimes J_a^z$, つまり $J_a^z \in \Pi$.

(ii) (巡回性) $J_{a_2}^{a_1} J_{a_3}^{a_2} \cdots J_{a_1}^{a_n} = 1$,　($a_1, \ldots, a_n$ は U 内の可縮なループ上に並んだ点).

Proof. (i) $\Delta J_a^z = J_a^z \otimes J_a^z$ の両辺がともに方程式 $dJ = \Delta(\Omega)J$ を満たし $z = a$ で値 $1 \otimes 1$ を取ることをチェックすればいい (計算は略). (ii) は命題 1 (ii) を繰り返し使えばいい. □

$\gamma : X \to X$ $(z \mapsto \gamma z)$ を X の自己正則同型写像とし, $\omega \in \Omega_X^1(U)$ の γ による引戻しを $\gamma^*\omega$ と表すことにする.

補題 1. 任意の自己正則同型 $\gamma : X \to X$ に対して,

$$I_{\gamma a}^{\gamma z}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = I_a^z(\gamma^*\omega_1, \ldots, \gamma^*\omega_n).$$

Proof. 通常の積分の変数変換 $\int_{\gamma a}^{\gamma z} \omega = \int_a^z \gamma^*\omega$ と n に関する帰納法を用いて

$$\begin{aligned}I_{\gamma a}^{\gamma z}(\omega_1, \ldots, \omega_n) &= \int_{\gamma a}^{\gamma z} \omega_1(z_1) I_{\gamma a}^{z_1}(\omega_2, \ldots, \omega_n) = \int_a^z \omega_1(\gamma z_1) I_{\gamma a}^{\gamma z_1}(\omega_2, \ldots, \omega_n) \\ &= \int_a^z \gamma^*\omega_1(z_1) I_a^{z_1}(\gamma^*\omega_2, \ldots, \gamma^*\omega_n) = I_a^z(\gamma^*\omega_1, \ldots, \gamma^*\omega_n).\end{aligned}$$

□

反復積分の母関数が γ に関する変数変換でどのように変換されるのか？これを記述する為に, 次の $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ の自己同型を導入する必要がある. 今, U 上の線形独立な微分形式の組 $\omega_V=(\omega_v)$ を考え ω_V が張る線形空間に γ が引戻しで作用していると仮定する. ω_V が張る線形空間 $\langle\omega_v \mid v\in V\rangle_{\mathbf{C}}$ と, 不定元 A_V が張る線形空間 $\langle A_v \mid v\in V\rangle_{\mathbf{C}}$ を, (ω_v) と (A_v) が互いの双対基底と見ることで, 互いの双対空間と見なそう:

$$(\omega_v, A_u)=\delta_{v,u}, \quad (u,v\in V).$$

但し, $(\ ,\ )$ は内積で $\delta_{v,u}$ は Kronecker デルタ. γ の $\langle\omega_v \mid v\in V\rangle_{\mathbf{C}}$ への引戻しによる作用 $(\omega\mapsto\gamma^*\omega)$ が, 双対空間 $\langle A_v \mid v\in V\rangle_{\mathbf{C}}$ に誘導する作用 (随伴作用) を γ_* と表そう:

$$(\omega_v, \gamma_* A_u)=(\gamma^*\omega_v, A_u), \quad (u,v\in V).$$

更に γ_* を代数射として $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ 上の代数自己同型に拡張し, それも γ_* と書くことにする. この作用を用いると, J_a^z の変数変換が次の様に記述できる.

命題 3. 線形独立な微分の組 ω_V の張る空間が, 自己同型 γ の引戻しによる作用で保たれているとする. このとき次が成立つ:

$$J_{\gamma a}^{\gamma z}=\gamma_* J_a^z.$$

Proof. $\gamma^*\omega_v=\sum_{u\in V}\gamma_{v,u}\omega_u$ とすると γ_* の作用は $\gamma_* A_u=\sum_{v\in V}\gamma_{v,u}A_v$ と表せる. これと先の補題を用いて

$$\begin{aligned}
J_{\gamma a}^{\gamma z} &= \sum_{n\geq 0}\sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n} I_{\gamma a}^{\gamma z}(\omega_{v_1},\ldots,\omega_{v_n})A_{v_1}\cdots A_{v_n}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n} I_a^z(\gamma^*\omega_{v_1},\ldots,\gamma^*\omega_{v_n})A_{v_1}\cdots A_{v_n}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{(v_1,\ldots,v_n)\in V^n} I_a^z(\sum_{u_1\in V}\gamma_{v_1,u_1}\omega_{u_1},\ldots,\sum_{u_n\in V}\gamma_{v_n,u_n}\omega_{u_n})A_{v_1}\cdots A_{v_n}\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in V^n} I_a^z(\omega_{u_1},\ldots,\omega_{u_n})(\sum_{v_1\in V}\gamma_{v_1,u_1}A_{v_1})\cdots(\sum_{v_n\in V}\gamma_{v_n,u_n}A_{v_n})\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in V^n} I_a^z(\omega_{u_1},\ldots,\omega_{u_n})(\gamma_* A_{v_1})\cdots(\gamma_* A_{v_n})=\gamma_* J_a^z.
\end{aligned}$$

□

3 Iterated Mellin transformation

この節では, 通常の Mellin 変換を簡単に復習した後, Manin の反復 Mellin 変換を定義しその性質を見てみよう.

$SL_2(\mathbf{Z})$ の合同部分群を Γ とし, Γ に関する重さ $k\in\mathbf{Z}$ の正則カスプ形式の空間を $S_k(\Gamma)$ とする. $f\in S_k(\Gamma)$ の Mellin 変換は, 複素変数 s に対して, $M(f;s):=\int_{i\infty}^0 f(z)z^{s-1}dz$ で定義される. この積分は s に関して entire である. Mellin 変換の関数等式を復習しよう (c.f. [13], [17]).

一般に, 整数 k に対し $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2^+(\mathbf{R})$ ($\det > 0$ の実正則行列群) の上半平面上の関数 f への作用を

$$(f|_{[\gamma]_k})(z) := (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d})$$

で定める. 今 N を自然数とし, Γ が $h_N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ による共役変換で固定されると仮定しよう: $\Gamma = h_N^{-1}\Gamma h_N$. h_N は Fricke involution などと呼ばれる. (例えば $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N\}$ は $\Gamma_0(N) = h_N^{-1}\Gamma_0(N)h_N$ を満たす.) h_N の作用は

$$(f|_{[h_N]_k})(z) := N^{-k/2} z^{-k} f(h_N z) = N^{-k/2} z^{-k} f(-\frac{1}{Nz})$$

と表せる. Γ に関する仮定から $f \in S_k(\Gamma)$ に対して $f|_{[h_N]_k} \in S_k(\Gamma)$ であるし, h_N^2 が定数行列なので h_N は $S_k(\Gamma)$ に involution として働く.

$f \in S_k(\Gamma)$ が h_N に関する固有関数: $f|_{[h_N]_k} = \varepsilon_f f, (\varepsilon = \pm 1)$ であるとき, 次が成立つ:

$$M(f;s) = -\varepsilon_f(-1)^{s-1} N^{k/2-s} M(f;k-s).$$

実際, $\omega = f(z)z^{s-1}dz$ とすると, その h_N による引戻しは,

$$\begin{aligned} h_N^*\omega &= f(h_N z)(h_N z)^{s-1} d(h_N z) \\ &= \varepsilon_f(-1)^{s-1} N^{k/2-s} z^{k-s-1} f(z)dz \end{aligned}$$

である. 従って, 積分の変数変換を用いて

$$M(f;s) = \int_{i\infty}^{0} \omega = \int_{h_N 0}^{h_N(i\infty)} \omega = \int_{0}^{i\infty} h_N^*\omega = -\varepsilon_f(-1)^{s-1} N^{k/2-s} M(f;k-s)$$

と示される. 次に Mellin 変換の反復積分版を考えて, 上の関数等式がどうのように一般化されるのか見てみよう.

定義 3 (反復 Mellin 変換). カスプ形式の組 $f_i \in S_{k_i}(\Gamma)$ と複素変数の組 s_i に対し, $\omega_i = f_i(z)z^{s_i-1}dz$ を考える. このとき反復 Mellin 変換を次で定義する:

$$\begin{aligned} M(f_1,\dots,f_n;s_1,\dots,s_n) &= I_{i\infty}^{0}(\omega_1,\dots,\omega_n) \\ &= \int_{i\infty}^{0} f_1(z_1){z_1}^{s_1-1}dz_1 \int_{i\infty}^{z_1} f_2(z_2){z_2}^{s_2-1}dz_2 \cdots \int_{i\infty}^{z_{n-1}} f_n(z_n){z_n}^{s_n-1}dz_n. \end{aligned}$$

更に次の母関数を考える.

定義 4 (Total Mellin 変換). カスプ形式の組 $f_V = (f_v)$, $f_v \in S_{k_v}(\Gamma)$ と複素変数の組 $s_V = (s_v)$ に対し, $\omega_V = (\omega_v)$, $\omega_v = f_v(z)z^{s_v-1}dz$ を考える. このとき次の母関数を Total Mellin 変換と呼ぶ:

$$\begin{aligned} TM(f_V;s_V) &:= J_{i\infty}^{0}(\omega_V) \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{(v_1,\dots,v_n)\in V^n} M(f_{v_1}\dots,f_{v_n};s_{v_1},\dots,s_{v_n})A_{v_1}\cdots A_{v_n}. \end{aligned}$$

定理 1. Γ を $\Gamma = h_N^{-1}\Gamma h_N$ を満たす合同部分群とする. $f_V = (f_v)$ を $f_v \in S_{k_v}(\Gamma)$ であり且つ h_N に関する固有関数の組とする: $f_v|_{[h_N]_{kv}} = \varepsilon_{f_v} f_v, (\varepsilon_{f_v} = \pm 1)$. このとき,

$$TM(f_V; s_V) = g_*(TM(f_V; k_V - s_V))^{-1}.$$

但し, $k_V - s_V = (k_v - s_v)$ で, g_* は $A_v \mapsto \varepsilon_{f_v}(-1)^{s_v-1}N^{k_v/2-s_v}A_v$, $(v \in V)$ で定まる $\mathbf{C}\langle\langle A_V\rangle\rangle$ の代数同型とする.

Proof. 補題 1 を用いると

$$I_{i\infty}^0(\omega_1, \ldots, \omega_n) = I_{h_N 0}^{h_N(i\infty)}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = I_0^{i\infty}(h_N^*\omega_1, \ldots, h_N^*\omega_n).$$

あとは命題 3 の証明と同様である. □

3.1 Iterated Mellin transform and multiple Dirichlet series

ここでは反復 Mellin 変換の変数 s_v が整数のときの値を, ある多重 Dirichlet 級数の値の線形結合で表示した結果を述べる. 証明は長めの計算が要るので論文に譲り, 結果を書くだけに止める.

$m_1 \ldots, m_k$ を整数とし, $\omega_r(z) = \sum_{n\geq 1} c_{r,n} e^{2\pi i n z} z^{m_r - 1}$, $(r = 1, \ldots, k, \ \forall c_{r,n} \in \mathbf{C})$ を考える. 今級数 $\sum_{n\geq 1} c_{r,n} e^{2\pi i n z}$ に保型性は仮定しない. 各係数は $n \to \infty$ の際の増加条件 $c_{r,n} = O(n^C)$, $(\exists\, C > 0)$ を満たすと仮定する.

定義 5 (多重 Dirichlet 級数). 上の仮定を満たす ω_r 達と条件 $m_r + j_{r-1} - j_r \geq 1$ を満たす非負整数の組 $j_1, \ldots, j_k$, $(j_0 := 0)$ に対し, 次を定義する:

$$\begin{aligned}
&L(z; \omega_k, \ldots, \omega_1; j_k, \ldots, j_1)\\
&= (2\pi i z)^{j_k} \sum_{1\leq n_1, \ldots, n_k} \frac{c_{1,n_1} \cdots c_{k,n_k} e^{2\pi i (n_1 + \cdots + n_k) z}}{n_1^{m_1 + j_0 - j_1}(n_1 + n_2)^{m_2 + j_1 - j_2} \cdots (n_1 + \cdots + n_k)^{m_k + j_{k-1} - j_k}}\\
&= (2\pi i z)^{j_k} \sum_{1\leq l_1 < \cdots < l_k} \frac{c_{1,l_1} c_{2,l_2 - l_1} \cdots c_{k,l_k - l_{k-1}} e^{2\pi i l_k z}}{l_1^{m_1 + j_0 - j_1} l_2^{m_2 + j_1 - j_2} \cdots l_k^{m_k + j_{k-1} - j_k}}.
\end{aligned}$$

この級数は $z \in \mathbf{H}$ (上半平面) にあるとき絶対収束し正則関数を定める.

定理 2. 上記の ω_r 達と $z \in \mathbf{H}$ に対して, 次が成立つ:

$$\begin{aligned}
&(-1)^k(-2\pi i)^{\sum_{r=1}^k m_r} I_{i\infty}^z(\omega_k, \ldots, \omega_1)\\
&= \sum_{j_1=0}^{m_1-1+j_0} \cdots \sum_{j_k=0}^{m_k-1+j_{k-1}} (-1)^{j_k} \prod_{r=1}^k \frac{(m_r - 1 + j_{r-1})!}{j_r!} L(z; \omega_k, \ldots, \omega_1; j_k, \ldots, j_1).
\end{aligned}$$

論文の中にも言及されているが, 定理左辺で $z \to 0$ と極限をとった値が, 反復 Mellin 変換の整数点 $(m_1, \ldots, m_k)$ での値であるが, 右辺の関数 L の $z \to 0$ での極限の存在の有無は m_r と j_r の取り方により様々な状況があり得る.

4 Cohomological interpretation

合同部分群 Γ に対し, 次の空間を考える:

$$Sh_k(\Gamma) := \langle\ f(z)z^{s-1}dz \mid f \in S_k(\Gamma),\ s = 1, 2, \ldots, k-1\ \rangle_{\mathbf{C}}.$$

この空間には自然に Γ が作用する. 実際, f の保型性を用いると $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対して,

$$\begin{aligned}\gamma^*(f(z)z^{s-1}dz) &:= f(\gamma z)(\gamma z)^{s-1}d(\gamma z)\\ &= f(z)(az+b)^{s-1}(cz+d)^{k-s-1}dz\end{aligned}$$

なので, $s = 1, 2, \ldots, k-1$ が渡る空間はこの作用で閉じている (f を走らせなくても作用は閉じている). 少し一般に, 異なる有限個の整数の組 $\mathbf{k} = (k_i)$ に対し, $Sh_{\mathbf{k}}(\Gamma) = \bigoplus_i Sh_{k_i}(\Gamma)$ を考え, その基底を $\omega_V = (\omega_v)$ とする. $a \in \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ を一つ固定し, 各 $\gamma \in \Gamma$ に対し, ω_V に付随する母関数 $J^a_{\gamma a} = J^a_{\gamma a}(\omega_V)$ を考える. Π が group like な巾級数全体のなす群であり, $J^a_{\gamma a}$ がその元であったことを思い出そう (命題 2). また $P\Gamma$ で Γ の $PSL_2(\mathbf{Z})$ への自然な射影像を表すことにする. Γ の $\mathbf{H}$ への作用は $P\Gamma$ を経由している.

定理 3. (i) 写像 $\zeta_a : P\Gamma \to \Pi$, $(\gamma \mapsto J^a_{\gamma a})$ は (非可換) 1-コサイクル条件を満たす:

$$J^a_{\gamma\beta a} = J^a_{\gamma a} \cdot \gamma_* J^a_{\beta a}.$$

そして, ζ_a が定めるコホモロジークラス $[\zeta_a] \in H^1(P\Gamma, \Pi)$ は a の選び方に依らない. 実際 $a, a' \in \overline{\mathbf{H}}$ に対し, ζ_a と $\zeta_{a'}$ はコホモロガスである:

$$\exists\, \eta \in \Pi\ ;\ \forall \gamma \in P\Gamma,\ \zeta_a(\gamma) = \eta^{-1}\zeta_{a'}(\gamma) \cdot \gamma_* \eta.$$

(ii) $[\zeta_a] \in H^1(P\Gamma, \Pi)_{cusp}$ が成立つ. 但し,

$$H^1(P\Gamma, \Pi)_{cusp} := \{\ \zeta \in H^1(P\Gamma, \Pi) \mid \zeta(\tau) = 1_\Pi,\ \forall \tau : \text{stabilizer of cusps}\ \}.$$

Manin はこのコホモロジー類を noncommutative modular symbol, 或いは Shimura class と呼んでいる.

Proof. (i) 始めの主張は $J^a_{\gamma\beta a} = J^a_{\gamma a} \cdot J^{\gamma a}_{\gamma\beta a} = J^a_{\gamma a} \cdot \gamma_* J^a_{\beta a}$. 続く主張は $\zeta_a(\gamma) = J^a_{\gamma a} = J^a_{a'} J^{a'}_{\gamma a'} J^{\gamma a'}_{\gamma a} = (J^{a'}_a)^{-1} \cdot \zeta_{a'}(\gamma) \cdot \gamma_* J^{a'}_a = \eta^{-1}\zeta_{a'}(\gamma) \cdot \gamma_* \eta$ と示される. (ii) τ が $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ を固定するとき, $\zeta_a(\tau) = J^a_{\tau a} = J^a_a = 1_\Pi$. □

Manin は [2] で $P\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$ の場合に非可換コホモロジーの具体表示を一般的に与えている. まず非可換群係数のコホモロジーの定義を復習してから, それを簡単に紹介しよう.

G を勝手な群, N を G が自己同型として左から作用する群 (可換群とは限らない) とする. (上の定理では $G = P\Gamma$, $N = \Pi$ に相当) G の N を係数とする 1-コサイクルの集合を

$$Z^1(G, N) := \{\ u : G \to N \mid u(g_1 g_2) = u(g_1)(g_1 \cdot u(g_2)),\ \forall g_1, g_2 \in G\}$$

で定める. N が可換群の場合, $Z^1(G, N)$ は自然に可換群になるが, N が非可換群の場合, 単に '点付き集合' (単位射という特別な元が入ってる集合と言う意味) でしかない. $u, u' \in Z^1(G, N)$ は, $\exists n \in N; \forall g \in G, u'(g) = n^{-1}u(g) \cdot gn$ であるとき, コホモロガスといい, この同値関係で

割った集合を $H^1(G,N)$ と書き, G の N を係数とする 1-st コホモロジー集合という. N が可換群の場合は可換群の構造が入り通常のコホモロジー群と一致する.

$G = PSL_2(\mathbf{Z})$ の場合を考える. G は $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ の 2 元で生成され $\sigma^2 = \tau^3 = 1$ が基本関係である. Manin は生成元 σ, τ のコサイクルによる像の特徴づけを与えている:

命題 4. (i) $G = PSL_2(\mathbf{Z})$ とし, N は任意の G が左から作用する群とする. このとき, 次の一対一対応がある:

$$Z^1(G,N) \longleftrightarrow \{\ (X,Y) \in N \times N \mid X \cdot \sigma X = Y \cdot \tau Y \cdot \tau^2 Y = 1\ \}.$$

対応は $u \in Z^1(G,N)$ に対して $(u(\sigma), u(\tau))$ を当てる.

(ii) 更に同値関係 $(X,Y) \sim (n^{-1}X\sigma n, n^{-1}Y\tau n)$, $(n \in N)$ がコホモロガスに対応する関係である.

古典的な保型形式の周期理論では, $f \in S_k(\Gamma)$, $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ に対して, 写像

$$\zeta_a : P\Gamma \longrightarrow W_{k-2}, \quad (\gamma \mapsto \int_{\gamma a}^{a} f(w)(z-w)^{k-2}dw)$$

を考える. この像 (普通は $a = i\infty$ とし $\gamma = \sigma$ の像) を周期多項式という. ここで W_{k-2} は,

$$W_{k-2} := \{\ p(z) \in \mathbf{C}[z] \mid \deg p \leq k-2\}$$

であり, これは $Sym^{k-2}(\mathbf{C}^2)$ (Γ の $\mathbf{C}^2$ への自然な作用の $k-2$ 階の対称巾表現) と同型である. このとき, $[\zeta_a] \in H^1(\Gamma, W_{k-2})_{cusp}$ が a に依らずに決まる. また, $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$ で N が勝手な Γ-加群の場合, 具体的表示

$$Z^1(\Gamma,N) \simeq \{\ (X,Y) \in N \times N \mid X + \sigma X = Y + \tau Y + \tau^2 Y = 0\ \}$$

が知られている. 古典的な周期理論の話は [9],[11],[13],[18] など, また modular symbol に関するの具体的計算や解説は [19] が参考になる. Manin はこの理論の非可換化 or 乗法化を考えたわけである.

$PSL_2(\mathbf{Z})$ は $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ に推移的に働くが, 一般の合同部分群 Γ の場合, そうとは限らない. 従って, modular symbol $\zeta_a(\gamma) = J^a_{\gamma a}$ の a と γa を繋ぐ積分路は任意のカスプを繋げるわけではない. Manin は以前に彼自身が導入した連分数のからくりを用いて (c.f. [15],[16],[13]), 'J^b_c (b, c は勝手なカスプ) を $J^a_{\gamma a}$ の形の元で表示する方法' を述べている. 最後にその方法を紹介しよう.

定義 6. Γ を $SL_2(\mathbf{Z})$ の合同部分群とし, 剰余集合 $\Gamma\backslash SL_2(\mathbf{Z})$ の完全代表系 C を一つ固定する. このとき $g \in C$ に対し, $(J^{g0}_{g(i\infty)})^{\pm 1}$ の形の元を, (C に関する) primitive な元と呼ぶ.

命題 5. 任意のカスプ $a, b \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ に対し, J^a_b は $\gamma_* J^c_d$ の形の元の積で表せる. 但し, ここで $\gamma \in \Gamma$ であり J^c_d は primitive な元である:

$$J^a_b = \gamma_{1*}(J^{g_1 0}_{g_1(i\infty)})^{\pm 1}\gamma_{2*}(J^{g_2 0}_{g_2(i\infty)})^{\pm 1}\cdots\gamma_{m*}(J^{g_m 0}_{g_m(i\infty)})^{\pm 1}.$$

ここで, $\gamma_i \in \Gamma$, $g_i \in C$ である.

Proof. $J_b^a = J_{i\infty}^a J_b^{i\infty} = J_{i\infty}^a (J_{i\infty}^b)^{-1}$ なので $J_{i\infty}^a$, $(a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}))$ の形の元が求める表示を持つことを言えばいい. $a > 0 \in \mathbf{Q}$ の場合を考えよう. (残る場合も同様にできる.)

1. a を連分数展開し, その第 k 近似分数を p_k/q_k とする:

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} := \frac{1}{0}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{p_0}{1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad \frac{p_n}{q_n} = a.$$

2. $k = 0, 1, \ldots, n$ に対し $g_k = \begin{pmatrix} p_k & (-1)^{k-1}p_{k-1} \\ q_k & (-1)^{k-1}q_{k-1} \end{pmatrix}$ と定める. $g_k(i\infty) = p_k/q_k$, $g_k 0 = p_{k-1}/q_{k-1}$ であり, 連分数の性質から $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ が成立つので $g_k \in SL_2(\mathbf{Z})$ である.

3. C は $\Gamma \backslash SL_2(\mathbf{Z})$ の完全代表系であったので $g_k = \gamma_k c_k$ を満たす $\gamma_k \in \Gamma$, $c_k \in C$ が取れる. 巡回性を用いて

$$J_{i\infty}^a = J_{p_{n-1}/q_{n-1}}^{p_n/q_n} J_{p_{n-2}/q_{n-2}}^{p_{n-1}/q_{n-1}} \cdots J_{p_{-1}/q_{-1}}^{p_0/q_0} = \prod_{k=0}^{n} J_{p_{k-1}/q_{k-1}}^{p_k/q_k}.$$

各因子に変数変換 $J_{p_{k-1}/q_{k-1}}^{p_k/q_k} = J_{g_k 0}^{g_k i\infty} = J_{\gamma_k(c_k 0)}^{\gamma_k(c_k i\infty)} = \gamma_{k*} J_{c_k 0}^{c_k i\infty}$ を施すと求める形を得る: $J_{i\infty}^a = \prod_{k=0}^n \gamma_{k*} J_{c_k 0}^{c_k i\infty}$. □

例えば $a = 67/29$ の場合の行列 g_k は次の様に求められる.

$$\frac{67}{29} = 2 + 1/(3 + 1/(4 + 1/2)) = 2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

k	-2	-1	0	1	2	3
m_k			2	3	4	2
p_k	0	1	2	7	30	67
q_k	1	0	1	3	13	29

表は予め m_k はベタに計算して, p_k, q_k は $p_{k+1} = p_k m_{k+1} + p_{k-1}$, $q_{k+1} = q_k m_{k+1} + q_{k-1}$ と計算した.

$$g_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 30 & -7 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 67 & 30 \\ 29 & 13 \end{pmatrix}.$$

自分の理解不足や怠慢で紹介できなかった箇所が少なからずあることを, お許し下さい. Manin の仕事への興味が湧いた方は, 是非本論文をご覧下さい. 最後になりましたが, 集会中お世話になりました岸先生, 権先生, 金子先生に深くお礼申し上げます.

参考文献

[1] Manin, Y. I., *Iterated integrals of modular forms and noncommutative modular symbols.* Progr. Math., 253, Birkhäuser, (2006).

[2] Manin, Y. I., *Iterated Shimura integrals.* Mosc. Math. J., 5 (2005), no. 4, 869–881.

[3] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie.* Hermann, Paris, (1971).

[4] Chari, V., Pressley, A., *A guide to quantum groups.* Cambridge, (1994).

[5] Chen, K. T., *Iterated path integrals.* Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), no. 5, 831–879.

[6] Consani, C., Review of [1] in MathSciNet, http://www.ams.org/mathscinet/

[7] Drinfel'd, V. G., *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Leningrad Math. J., 2 (1991), no. 4, 829–860.

[8] Goncharov, A. B., *Multiple* ζ*-values, Galois groups, and geometry of modular varieties.* Progr. Math., 201, Birkhäuser, (2001).

[9] Hida, H., *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series.* London Mathematical Society Student Texts, 26. Cambridge, (1993).

[10] Kassel, C., *Quantum groups.* GTM 155. Springer, (1995).

[11] Kohnen, W., Zagier, D., *Modular forms with rational periods.* Modular forms (editor: A. Rankin), 197–249, Ellis Horwood (1984).

[12] Kontsevich, M., Zagier, D., *Periods.* Mathematics unlimited—2001 and beyond, Springer, (2001).

[13] Lang, S., *Introduction to modular forms.* Springer, Heidelberg, (1976).

[14] Lothaire, M., *Combinatorics on words.* Cambridge, (1997).

[15] Manin, J. I., *Parabolic points and zeta functions of modular curves.* Math. USSR-Izv., 6 (1972), 19–64.

[16] Manin, J. I., *Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series.* Math. USSR-Sb., 92 (1973), 371–393.

[17] Miyake, T., *Modular forms.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, (2006).

[18] Shimura, G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Iwanami and Princeton, (1971).

[19] Stein, W., Lecture notes. http://modular.math.washington.edu/edu/Fall2003/

[20] Zagier, D., *Values of zeta functions and their applications.* Progr. Math., 120, Birkhäuser, (1994).