Refined sum formula of multiple zeta value

宗田 修一 (九州大学)

1 Introduction

正の整数 k_1, k_2, ..., k_n, ただし $k_1 \geq 2$ に対して, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ は

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

で定義される．ここで $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ を weight, n を depth と呼ぶ．この報告集では この多重ゼータ値が主役であるが, 以下のように定義される等号付き多重ゼータ値 (multiple zeta star value) も出てくる:

$$\zeta^{\star}(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

多重ゼータ値の間には非常に多くの関係式があることが知られているが, その中でも次に述べる sum formula は最も美しい関係式である．

Theorem 1. $0 < n < k$ を満たす整数 k, n に対して,

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k \\ k_1 \geq 2,\ k_2, \ldots, k_n \geq 1}} \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \zeta(k)$$

が成立する．

この関係式の証明は色々な方法でなされている ([7], [11], [13], [17], [19])．Theorem 1 の主張は weight が k, depth が n の多重ゼータ値をすべて足し合わせると, リーマンゼータ値になるということである．この報告集で述べるのは, この sum formula にさらに条件を付けて, 細分化した公式である．その例として以下の事実が知られている．

Theorem 2 ([8]). $k \geq 2$ を満たす整数 k に対して,

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 = 2k \\ k_i : even}} \zeta(k_1, k_2) = \frac{3}{4} \zeta(2k), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 = 2k \\ k_i : odd,\ k_1 \geq 3}} \zeta(k_1, k_2) = \frac{1}{4} \zeta(2k) \tag{2}$$

が成立する．

(1) と (2) の両辺足すと Theorem 1 の $n = 2$, k が 4 以上の偶数の場合が導かれる．そういう理由でこの 2 つの式を refined sum formula と呼んでいる．この報告集では (1) の一般化 (まだ証明は出来てないが) について述べる．(2) の一般化については現在のところ全く手付かずの状態であるが, (2) から得られる $4\zeta(3, 1) = \zeta(4)$ の一般化について述べる．

2　A generalization of (1)

この Section で (1) の一般化について述べる．大まかな流れとしては

$$\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=2n+2m \\ k_i:even}} \zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n) = (\text{Bernoulli 数の式}) \tag{3}$$

($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$) を導き, 更に右辺を変形して (1) を示す．その証明方法から (1) の一般化のアプローチを紹介する．これからの議論では多重ゼータ値の代数的定式化が必要になるのでそれの説明をする ([10], [13])．まず x, y を変数とする 2 変数非可換多項式環

$$\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$$

を考え, その部分環 $\mathfrak{H}^1$ と $\mathfrak{H}^0$ を

$$\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y, \quad \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$$

で定義する．更に $k \geq 1$ に対して $z_k = x^{k-1}y$ とおく．すると $\mathfrak{H}^1$ は z_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) によって自由に生成される:

$$\mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q}\langle z_1, z_2, z_3, \ldots\rangle.$$

また $k \geq 2$ のとき z_k は $\mathfrak{H}^0$ に含まれる．

次に $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ を (evaluation map と呼ぶ)

$$Z(1) = 1, \quad Z(z_{k_1}z_{k_2}\cdots z_{k_n}) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

で定義する．つまり, この evaluation map によって 2 変数非可換多項式環と多重ゼータ値を対応付ける．

多重ゼータ値には級数表示から得られる harmonic 積という積がある．例えば,

$$\begin{aligned}
\zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{m>0}\frac{1}{m^p}\right)\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n^q}\right) = \sum_{m,n>0}\frac{1}{m^p n^q} \\
&= \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{n>m>0} + \sum_{m=n>0}\right)\frac{1}{m^p n^q} \\
&= \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q).
\end{aligned}$$

これに対応した $\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*$ を帰納的に

$$\begin{aligned}
w * 1 = 1 * w = w, \\
z_p w_1 * z_q w_2 = z_p(w_1 * z_q w_2) + z_q(z_p w_1 * w_2) + z_{p+q}(w_1 * w_2)
\end{aligned}$$

(p, q は正の整数で, かつ w, w_1, w_2 は $\mathfrak{H}^1$ の単項式) で定義し, $\mathbb{Q}$-双線形に拡張する．例えば, $z_p * z_q = z_p z_q + z_q z_p + z_{p+q}$. これは $\zeta(p)\zeta(q) = \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q)$ に対応している．正確には Z が $*$ に関して準同型であることを使う ([10]):

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2). \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0)$$

最後に等号付き多重ゼータ値と 2 変数非可換多項式環を対応付けるときに使う $\mathbb{Q}$-線形写像 S を導入する ([12], [15]). $S_1 \in Aut(\mathfrak{H})$ を

$$S_1(1) := 1, \quad S_1(x) := x, \quad S_1(y) := x + y$$

で定義し, この S_1 を使って $\mathbb{Q}$-線形写像 $S : \mathfrak{H}^1 \longrightarrow \mathfrak{H}^1$ を

$$S(1) := 1, \quad S(Fy) := S_1(F)y$$

で定義する. このとき次の等式が成り立つ:

$$\zeta^\star(k_1, k_2, \dots, k_n) = Z(S(z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_n})).$$

例えば, $\zeta^\star(k_1, k_2) = \zeta(k_1 + k_2) + \zeta(k_1, k_2) = Z(S(z_{k_1} z_{k_2}))$. $\zeta^\star(k_1, k_2, k_3) = \zeta(k_1 + k_2 + k_3) + \zeta(k_1 + k_2, k_3) + \zeta(k_1, k_2 + k_3) + \zeta(k_1, k_2, k_3) = Z(S(z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}))$.

S の定義より次のことも成り立つ:

$$S(w_1 w_2) = S_1(w_1) S(w_2). \quad (w_1 \in \mathfrak{H}, w_2 \in \mathfrak{H}y)$$

これを繰り返し使うと,

$$\begin{aligned}
&S(z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_n}) \\
&= z_{k_1} S(z_{k_2} z_{k_3} \cdots z_{k_n}) + S(z_{k_1+k_2} z_{k_3} \cdots z_{k_n}) \\
&= z_{k_1} S(z_{k_2} z_{k_3} \cdots z_{k_n}) + z_{k_1+k_2} S(z_{k_3} \cdots z_{k_n}) + S(z_{k_1+k_2+k_3} z_{k_4} \cdots z_{k_n}) \\
&= \cdots \\
&= \sum_{j=1}^{n} z_{k_1+k_2+\cdots+k_j} S(z_{k_{j+1}} z_{k_{j+2}} \cdots z_{k_n}).
\end{aligned}$$

(ただし $j = n$ のとき $S(z_{k_{j+1}} z_{k_{j+2}} \cdots z_{k_n})$ は 1 とみなす.) ここから (3) を導くための定理を示すが, その証明の中でこの等式を使っている.

Theorem 3. $n, l \in \mathbb{Z}_{>0}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して以下が成立する:

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=m \\ i_1,i_2,\dots,i_n \geq 0}} z_{l+li_1} z_{l+li_2} \cdots z_{l+li_n} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i}.$$

Proof. $m = 0$ は自明なので以下では $m \geq 1$ とする. 右辺は次のように変形できる ($m = 1$ のとき以下で出てくる $\sum_{j=2}^{m}$ は 0 とみなす):

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \binom{m+n}{n} z_l^{m+n} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} \sum_{j=1}^{i} z_{lj} S(z_l^{i-j}) * z_l^{m+n-i} \\
&= (-1)^m \binom{m+n}{n} z_l^{m+n} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} z_{lj} \left(S(z_l^{i-j}) * z_l^{m+n-i} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} z_l \left(S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} z_{l(j+1)} \left(S(z_l^{i-j}) * z_l^{m+n-i-1} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= z_l \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} z_{lj} \sum_{i=j}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^{i-j}) * z_l^{m+n-i} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} z_{l(j+1)} \sum_{i=j}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^{i-j}) * z_l^{m+n-i-1} \\
&= z_l \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + z_l \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^{i-1}) * z_l^{m+n-i} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} \sum_{i=j}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^{i-j}) * z_l^{m+n-i} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m+1} z_{lj} \sum_{i=j-1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^{i-j+1}) * z_l^{m+n-i-1} \\
&= z_l \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + z_l \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} \binom{m+n-i-1}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j} (-1)^{m-i-j} \binom{m+n-i-j}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m+1} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j+1} (-1)^{m-i-j+1} \binom{m+n-i-j+1}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} \\
&= z_l \left(S(z_l^m) * z_l^{n-1} \right) + z_l \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i-1}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j} (-1)^{m-i-j} \binom{m+n-i-j}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j+1} (-1)^{m-i-j+1} \binom{m+n-i-j+1}{n} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} + z_{l(m+1)} z_l^{n-1} \\
&= z_l \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i-1}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j} (-1)^{m-i-j+1} \binom{m+n-i-j}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} S(z_l^{m-j+1}) * z_l^{n-1} + z_{l(m+1)} z_l^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z_l \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m+n-i-1}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-1} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j+1} (-1)^{m-i-j+1} \binom{m+n-i-j}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} + z_{l(m+1)} z_l^{n-1} \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} z_{lj} \sum_{i=0}^{m-j+1} (-1)^{m-i-j+1} \binom{m+n-i-j}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{m} z_{l+lj} \sum_{i=0}^{m-j} (-1)^{m-i-j} \binom{m+n-i-j-1}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j-1}.
\end{aligned}
$$

ゆえに次の等式を示せばよい:

$$
\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=m \\ i_1,\ldots,i_n \geq 0}} z_{l+li_1} \cdots z_{l+li_n} = \sum_{j=0}^{m} z_{l+lj} \sum_{i=0}^{m-j} (-1)^{m-i-j} \binom{m+n-i-j-1}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j-1}.
$$

これを n についての帰納法で示す. $n=1$ のとき,

$$
(\text{右辺}) = \sum_{j=0}^{m} z_{l+lj} \sum_{i=0}^{m-j} S(z_l^i) * (-z_l)^{m-i-j} = z_{l+lm}.
$$

最後の等式では以下の関係式を使っている:

$$
\sum_{i=0}^{m} S(z_l^i) * (-z_l)^{m-i} = \delta_{m0}.
$$

(この等式は m についての帰納法で示せるが, より一般的な等式が [12] に示されている. 記号は違うが [14] の Proposition 7.1 でも一般的な等式が示されている) よって $n=1$ のとき成立する. $n-1$ まで成り立つと仮定すると,

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sum_{j=0}^{m} z_{l+lj} \sum_{i=0}^{m-j} (-1)^{m-i-j} \binom{m+n-i-j-1}{n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+n-i-j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{m} z_{l+lj} \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{n-1}=m-j \\ i_1,\ldots,i_{n-1} \geq 0}} z_{l+li_1} \cdots z_{l+li_{n-1}} = (\text{左辺}).
\end{aligned}
$$

よって n のときも成立する. □

Corollary 4. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=2n+2m \\ k_i:even}} \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) \\
&\qquad = (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m} \binom{n+m-i}{n} \frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!} \frac{1}{(2n+2m-2i+1)!} \pi^{2n+2m}
\end{aligned}
$$

が成立する.

Proof. Theorem 3 で $l=2$ とし, 更に以下の公式を使えばよい:

$$\zeta^\star(\underbrace{2,2,\cdots,2}_{i}) = (-1)^{i-1}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\pi^{2i},$$

$$\zeta(\underbrace{2,2,\cdots,2}_{m+n-i}) = \frac{\pi^{2m+2n-2i}}{(2m+2n-2i+1)!}.$$

([1], [2], [9], [15], [18], [19], [20] etc.) □

ここから Corollary 4 を用いて (1) を導く. まず以下の Lemma を示す.

Lemma 5. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$2^{2m}\frac{B_{2m+4}}{(2m+4)!} = \sum_{i=0}^{m}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\binom{m-i+3}{3}\frac{1}{(2m-2i+6)!}$$

が成立する.

Proof. (この証明方法は金子昌信先生の教示による.)

$$\sum_{i=0}^{\infty} B_{2i}\frac{x^{2i}}{(2i)!} = \frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$$

より,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}x^{2i} = -2x\frac{1}{e^x-e^{-x}}. \tag{4}$$

次に,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{j+3}}{(2j+6)!} = \frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}$$

の両辺を x について 3 回微分すると,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+3)(j+2)(j+1)\frac{x^j}{(2j+6)!} = \left(\frac{3}{16x^2\sqrt{x}}+\frac{1}{16x\sqrt{x}}\right)(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}})-\frac{3}{16x^2}(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}).$$

x のところに x^2 を代入し, 両辺 6 で割ると

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+3}{3}\frac{1}{(2j+6)!}x^{2j} = \left(\frac{1}{32x^5}+\frac{1}{96x^3}\right)(e^x-e^{-x})-\frac{1}{32x^4}(e^x+e^{-x}). \tag{5}$$

よって (4) と (5) を用いると,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(\mathrm{RHS})x^{2m} = \frac{1}{16x^3}\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{48x^2}-\frac{1}{16x^4}.$$

これが $\sum_{m=0}^{\infty}(\mathrm{LHS})x^{2m}$ に一致することは Bernoulli 数の母関数よりすぐに確認できる. □

Proof of (1).

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k_1+k_2=2m+4\\k_i:even}}\zeta(k_1,k_2)&=(-1)^{m+1}\sum_{i=0}^{m}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\binom{m-i+2}{2}\frac{\pi^{2m+4}}{(2m-2i+5)!}\\&=(-1)^{m+1}\cdot 6\sum_{i=0}^{m}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\binom{m-i+3}{3}\frac{\pi^{2m+4}}{(2m-2i+6)!}\\&=(-1)^{m+1}\cdot 6\cdot 2^{2m}\frac{B_{2m+4}}{(2m+4)!}\pi^{2m+4}\\&=\frac{3}{4}\zeta(2m+4).\end{aligned}$$

第 1 等式では Corollary 4 を使い, 第 3 等式では Lemma 5 を使っている. □

この証明からわかるように, Lemma 5 を一般化すれば (1) の一般化が得られる. (Corollary 4 は一般の depth について述べてある.) 残念ながら Lemma 5 の一般化はまだ出来ていないが, 次の予想が得られた ($n=2$ のときが Lemma 5).

Conjecture 6. $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して以下の関係式が成り立つ (であろう):

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(2n+1-4k)!!\binom{2n+1-2k}{2k-1}2^{2m+n-2k+1}\frac{B_{2m+2n-2k+2}}{(2m+2n-2k+2)!}\\&\qquad=\sum_{i=0}^{m}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\binom{n+1+m-i}{n+1}\frac{1}{(2n+2m-2i+2)!},\end{aligned}$$

ここで $(-1)!!$ は 1 とみなす.

この Conjecture 6 は Lemma 5 と同様に証明できると思われる. つまり $\cosh\sqrt{x}$ の $n+1$ 回微分

$$\begin{aligned}&\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\\&\qquad=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\left((-1)^k e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)(2n-2k+1)!!\binom{2n-k+1}{k-1}x^{-n+\frac{k}{2}-1}\end{aligned}$$

を用いて右辺と左辺の母関数を計算していく. しかし, 母関数の一致を示すのに Bernoulli 数の複雑な等式が出てきてそれがまだ証明できていない ([6] を利用すれば証明できるかもしれないが, まだ確認は出来ていない).

Conjecture 6 を仮定すると, (1) の一般化が得られる：

Theorem 7. Conjecture 6 を仮定する. $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_n=2n+2m\\k_i:even}}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)\\&=\frac{1}{2^{n-1}n!}\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^{k-1}(2n+1-4k)!!\binom{2n+1-2k}{2k-1}\zeta(2m+2n-2k+2)\pi^{2k-2}\end{aligned}$$

が成立する.

3 A generalization of $4\zeta(3,1)=\zeta(4)$

このSectionでは$4\zeta(3,1)=\zeta(4)$の一般化について述べる．まず次の式はよく知られている:

$$4^n\zeta(\underbrace{3,1,\cdots,3,1}_{2n})=\zeta(\underbrace{4,4,\cdots,4}_{n}). \tag{6}$$

(6)は以下の表記から明らかである([2], [3], [4], [5], [19], etc.):

$$\zeta(\underbrace{3,1,\cdots,3,1}_{2n})=\frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!},\quad \zeta(\underbrace{4,4,\cdots,4}_{n})=\frac{2^{2n+1}\pi^{4n}}{(4n+2)!}.$$

これから(6)の一般化について述べる．ポイントとなるのは以下のProposition 8であるが, その中で出てくる記号$\widetilde{ш}$の説明をする．$\mathfrak{H}^1$上の積$\widetilde{ш}$を帰納的に

$$\begin{aligned} 1\,\widetilde{ш}\,w &= w\,\widetilde{ш}\,1 = w,\\ u_1w_1\,\widetilde{ш}\,u_2w_2 &= u_1(w_1\,\widetilde{ш}\,u_2w_2)+u_2(u_1w_1\,\widetilde{ш}\,w_2)\end{aligned}$$

($u_1,u_2\in\{z_k\}_{k\geq1}$かつ$w$, w_1, w_2は$\mathfrak{H}^1$の単項式)で定義し, $\mathbb{Q}$-双線形に拡張する．($u_1,u_2\in\{x,y\}$のときは通常のshuffle積$ш$.) 例えば,

$$\begin{aligned} z_m\,\widetilde{ш}\,z_n &= z_mz_n+z_nz_m,\\ z_m\,\widetilde{ш}\,z_nz_l &= z_mz_nz_l+z_nz_mz_l+z_nz_lz_m.\end{aligned}$$

Proposition 8. (i) $0\leq n\leq N$をみたす整数n, Nに対して以下の関係式が成立する．

$$z_2^n*z_2^N=\sum_{k=0}^{n}\binom{N+n-2k}{n-k}z_2^{N+n-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^k. \tag{7}$$

(ii) m, $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$に対して以下が成立する．

$$Z\left(z_2^m\,\widetilde{ш}\,z_4^n\right)=4^n\binom{m+2n}{m}\frac{\pi^{2m+4n}}{(2n+1)\cdot(2m+4n+1)!}. \tag{8}$$

Proof. (i) nについての帰納法で示す．$n=0$は明らか．$n-1$のとき成り立つと仮定してnのとき成立することをNについての帰納法で示す.

$$\begin{aligned} z_2^n*z_2^n &= 2z_2(z_2^{n-1}*z_2^n)+z_4(z_2^{n-1}*z_2^{n-1})\\ &= 2z_2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1-2k}{n-1-k}z_2^{2n-1-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^k+z_4\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-2-2k}{n-1-k}z_2^{2n-2-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^k\\ &= z_2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-2k}{n-k}z_2^{2n-1-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^k+z_4\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}z_2^{2n-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^{k-1}\\ &= \binom{2n}{n}z_2^{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-2k}{n-k}z_2^{2n-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^k+z_4^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}z_2^{2n-2k}\,\widetilde{ш}\,z_4^k.\end{aligned}$$

よって $N=n$ のとき成立する．$N-1$ のとき成り立つと仮定する (以下では $N-1\geq n$ と仮定してよい).

$$\begin{aligned}
z_2^n * z_2^N &= z_2(z_2^{n-1} * z_2^N) + z_2(z_2^n * z_2^{N-1}) + z_4(z_2^{n-1} * z_2^{N-1}) \\
&= z_2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N+n-1-2k}{n-1-k} z_2^{N+n-1-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^k \\
&\quad + z_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{N+n-1-2k}{n-k} z_2^{N+n-1-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^k \\
&\quad + z_4 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N+n-2-2k}{n-1-k} z_2^{N+n-2-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^k \\
&= z_2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N+n-2k}{n-k} z_2^{N+n-1-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^k + z_2(z_2^{N-n-1} \,\widetilde{ш}\, z_4^n) \\
&\quad + z_4 \sum_{k=1}^{n} \binom{N+n-2k}{n-k} z_2^{N+n-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^{k-1} \\
&= \binom{N+n}{n} z_2^{N+n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{N+n-2k}{n-k} z_2^{N+n-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^k + (z_2^{N-n} \,\widetilde{ш}\, z_4^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{N+n-2k}{n-k} z_2^{N+n-2k} \,\widetilde{ш}\, z_4^k.
\end{aligned}$$

よって N のときも成立する．(ii) n についての帰納法で主張を示すが, その前に帰納法での証明のときに必要になる等式を示す．$(x+1)^{2m+4n+2}=(x^2+2x+1)^{m+2n+1}$ の両辺の x^{2n+1} の係数を比べると,

$$\binom{2m+4n+2}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1} \frac{(m+2n+1)!}{(n-k)!(2k+1)!(m+n-k)!}.$$

これは

$$\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(2m+2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} 4^k \binom{m+2n-2k}{n-k}\binom{m+2n}{2k} \frac{1}{(2k+1)\cdot(2m+4n+1)!} \tag{9}$$

と変形できる．ここから n についての帰納法で示す．$n=0$ はよく知られている結果 (cf. Corollary 4 の証明)．$n-1$ まで成り立つと仮定する．(7) で $N=m+n$ とすると帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned}
Z\left(z_2^m \,\widetilde{ш}\, z_4^n\right) &= \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2m+2n}}{(2m+2n+1)!} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+2n-2k}{n-k} \cdot 4^k \binom{m+2n}{2k} \frac{\pi^{2m+4n}}{(2k+1)\cdot(2m+4n+1)!}.
\end{aligned}$$

更に (9) を使うとこの式は

$$Z\left(z_2^m \,\widetilde{ш}\, z_4^n\right) = 4^n \binom{m+2n}{m} \frac{\pi^{2m+4n}}{(2n+1)\cdot(2m+4n+1)!}$$

となるので n のときも成立する． $\square$

この Proposition 8 (ii) より (6) の一般化が得られる.

Corollary 9. m, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して以下が成立する:

$$Z\left(z_2^m \,\widetilde{\text{ш}}\, z_4^n\right) = 4^n Z\left(z_2^m \,\widetilde{\text{ш}}\, (z_3 z_1)^n\right).$$

特に $m = 0$ とすると (6) が得られる.

Proof. (8) と

$$Z\left(z_2^m \,\widetilde{\text{ш}}\, (z_3 z_1)^n\right) = \binom{m+2n}{m} \frac{\pi^{2m+4n}}{(2n+1)\cdot(2m+4n+1)!}$$

([5], [16]) より成立する. □

Appendix

この Appendix では Theorem 3 の別証明について述べる. 以下の結果は形式的べき級数環 $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathbb{Q}\langle\langle x, y\rangle\rangle$ での等式である.

Theorem 10. a, b, $c \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, この a, b, c に対して

$$A = z_a \frac{1}{1+z_c}, \quad B = z_b \frac{1}{1+z_c}, \quad C = S\left(\frac{1}{1-z_c}\right)$$

とおく. このとき任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して以下の式が成立する:

$$\frac{1}{1-x^c} z_b \left(\frac{1}{1-x^c} z_a \frac{1}{1-x^c} z_b\right)^{n-1} = C * \frac{1}{1+z_c} B(AB)^{n-1}, \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{1-x^c} z_a \frac{1}{1-x^c} z_b\right)^{n} = C * \frac{1}{1+z_c} (AB)^{n}. \tag{11}$$

この定理の証明の前に補題を示す.

Lemma 11. $c \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, この c に対して

$$C = S\left(\frac{1}{1-z_c}\right)$$

とおく. このとき, 以下の関係式が成り立つ.

$$1 - z_c \frac{1}{1+z_c} = \frac{1}{1+z_c}, \tag{12}$$

$$C * \frac{1}{1+z_c} = 1, \tag{13}$$

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C = C. \tag{14}$$

Proof. (12) は明らかに成立する.
(13)

$$C * \frac{1}{1+z_c} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} S(z_c^i) * (-z_c)^{n-i}.$$

ここで,

$$\sum_{i=0}^{n} S(z_c^i) * (-z_c)^{n-i} = 0 \qquad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

が成り立つので主張が示せる (cf. Theorem 3 の証明).

(14) (この証明は井原健太郎さんによる.)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= S\big(1 + (1-z_c)^{-1} z_c\big) \\
&= S\big(1 + (1-x^{c-1}y)^{-1} x^{c-1} y\big) \\
&= 1 + \big(1 - x^{c-1}(x+y)\big)^{-1} x^{c-1} y \\
&= \big(1 - x^{c-1}(x+y)\big)^{-1} \big(1 - x^{c-1}(x+y) + x^{c-1} y\big) \\
&= \big(1 - x^{c-1}(x+y)\big)^{-1} (1 - x^c) \\
&= \big(1 - (1-x^c)^{-1} x^{c-1} y\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

よって,

$$C = \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\right)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\right)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C.$$

□

Proof of Theorem 10. n についての帰納法で (10), (11) を同時に示す. (i) $n = 1$ のとき (10), (11) が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
\text{(10) の右辺} &= \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C\right) * \left(z_b \frac{1}{1+z_c} - z_c \frac{1}{1+z_c} B\right) \quad \big(\text{by } (12), (14)\big) \\
&= z_b \frac{1}{1+z_c} - z_c \frac{1}{1+z_c} B + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C * z_b \frac{1}{1+z_c} - \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C * z_c \frac{1}{1+z_c} B \\
&= z_b \frac{1}{1+z_c} - z_c \frac{1}{1+z_c} B \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} \left(C * z_b \frac{1}{1+z_c}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} z_b \left(z_{cm} C * \frac{1}{1+z_c}\right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm+b} \left(C * \frac{1}{1+z_c}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} \left(C * z_c \frac{1}{1+z_c} B\right) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} z_c \left(z_{cm} C * \frac{1}{1+z_c} B\right) - \sum_{m=1}^{\infty} z_{c(m+1)} \left(C * \frac{1}{1+z_c} B\right) \\
&= z_b \left\{\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C\right) * \frac{1}{1+z_c}\right\} - z_c \left\{\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} C\right) * \frac{1}{1+z_c} B\right\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm} \left\{C * \left(1 - z_c \frac{1}{1+z_c}\right) B\right\} + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm+b} \left(C * \frac{1}{1+z_c}\right) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} z_{c(m+1)} \left(C * \frac{1}{1+z_c} B\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= z_b\left(C * \frac{1}{1+z_c}\right) - z_c\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm+b}\left(C * \frac{1}{1+z_c}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} z_{c(m+1)}\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) \quad \bigl(\text{by } (12), (14)\bigr) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} z_{cm+b}\left(C * \frac{1}{1+z_c}\right) = (10) \text{ の左辺} \quad \bigl(\text{by } (13)\bigr).
\end{aligned}
$$

よって $n=1$ のとき (10) は成立する．次に，

$$
\begin{aligned}
&(11) \text{ の右辺} \\
&= \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}C\right) * \left(z_a \frac{1}{1+z_c}B - z_c \frac{1}{1+z_c}AB\right) \quad \bigl(\text{by } (12), (14)\bigr) \\
&= z_a \frac{1}{1+z_c}B - z_c \frac{1}{1+z_c}AB + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}C * z_a \frac{1}{1+z_c}B - \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}C * z_c \frac{1}{1+z_c}AB \\
&= z_a \frac{1}{1+z_c}B - z_c \frac{1}{1+z_c}AB \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\left(C * z_a \frac{1}{1+z_c}B\right) + \sum_{m=1}^{\infty} z_a\left(z_{cm}C * \frac{1}{1+z_c}B\right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm+a}\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) - \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\left(C * z_c \frac{1}{1+z_c}AB\right) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} z_c\left(z_{cm}C * \frac{1}{1+z_c}AB\right) - \sum_{m=1}^{\infty} z_{c(m+1)}\left(C * \frac{1}{1+z_c}AB\right) \\
&= z_a\left\{\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}C\right) * \frac{1}{1+z_c}B\right\} - z_c\left\{\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}C\right) * \frac{1}{1+z_c}AB\right\} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\left\{C * \left(1 - z_c \frac{1}{1+z_c}\right)AB\right\} + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm+a}\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} z_{c(m+1)}\left(C * \frac{1}{1+z_c}AB\right) \\
&= z_a\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) - z_c\left(C * \frac{1}{1+z_c}AB\right) + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm}\left(C * \frac{1}{1+z_c}AB\right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} z_{cm+a}\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) - \sum_{m=1}^{\infty} z_{c(m+1)}\left(C * \frac{1}{1+z_c}AB\right) \quad \bigl(\text{by } (12), (14)\bigr) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} z_{cm+a}\left(C * \frac{1}{1+z_c}B\right) = (11) \text{ の左辺}.
\end{aligned}
$$

ここで，最後の等式は (10) の $n=1$ のときの等式を用いている．よって $n=1$ のとき (11) は成立する．(ii) $n-1$ のとき (10), (11) が成り立つと仮定する．n のときも成り立つことは (i) と同様の計算をすると示すことができる． □

***Theorem 3* の別証明．** (10) で $a=b=c=l$ とおき，degree が $(2n-1)l+ml$ の部分を抜き

出すと,

$$\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{2n-1}=m\\ i_1,\ldots,i_{2n-1}\geq 0}} z_{l+li_1}\cdots z_{l+li_{2n-1}}$$
$$=\sum_{i=0}^{m} S(z_l^i) * \sum_{\substack{j_0+\cdots+j_{2n-1}=m-i\\ j_0,\ldots,j_{2n-1}\geq 0}} (-z_l)^{j_0} z_l (-z_l)^{j_1} z_l (-z_l)^{j_2}\cdots z_l(-z_l)^{j_{2n-2}} z_l (-z_l)^{j_{2n-1}}$$
$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m+2n-1-i}{2n-1} S(z_l^i) * z_l^{m+2n-1-i}.$$

これは Theorem 3 の n が奇数のときの式である. n が偶数のときは (11) で $a=b=c=l$ とおき, degree が $2nl+ml$ の部分を抜き出すと同様に示せる. □

Theorem 10 の応用として以下の系がある.

Corollary 12. $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ とする.

$$\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{2n}=m\\ i_1,\ldots,i_{2n}\geq 0}} \zeta(3+2i_1, 1+2i_2,\ldots,3+2i_{2n-1},1+2i_{2n})$$
$$=(-1)^{m+1}\left\{\sum_{i=0}^{m}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\frac{2}{(2m+4n-2i+2)!}\binom{m+2n-i+1}{2n+1}\right\}\pi^{2m+4n}$$

が成立する.

Proof. (11) で $a=3$, $b=1$, $c=2$ とし, degree が $2m+4n$ の部分を抜き出すと,

$$\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{2n}=m\\ i_1,\ldots,i_{2n}\geq 0}} z_{3+2i_1}z_{1+2i_2}\cdots z_{3+2i_{2n-1}}z_{1+2i_{2n}}$$
$$=\sum_{i=0}^{m} S(z_2^i) * \sum_{\substack{j_0+\cdots+j_{2n}=m-i\\ j_0,\ldots,j_{2n}\geq 0}} (-z_2)^{j_0} z_3 (-z_2)^{j_1} z_1 (-z_2)^{j_2}\cdots z_3(-z_2)^{j_{2n-1}} z_1 (-z_2)^{j_{2n}}$$
$$=(-1)^m\sum_{i=0}^{m}(-1)^i S(z_2^i) * \left(z_2^{m-i}\,\widetilde{\text{ш}}\,(z_3z_1)^n\right).$$

ここで,

$$\zeta^\star(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{i}) = (-1)^{i-1}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\pi^{2i},$$
$$Z\left(z_2^{m-i}\,\widetilde{\text{ш}}\,(z_3z_1)^n\right)=\frac{2}{(2m+4n-2i+2)!}\binom{m+2n-i+1}{2n+1}\pi^{2m+4n-2i}$$

が成り立つので主張が導かれる. □

Corollary 12 において $n=1$ とすると,

$$\sum_{\substack{i_1+i_2=m\\ i_1,i_2\geq 0}}\zeta(3+2i_1,1+2i_2)=(-1)^{m+1}\left\{\sum_{i=0}^{m}\frac{(2^{2i}-2)B_{2i}}{(2i)!}\frac{2}{(2m-2i+6)!}\binom{m-i+3}{3}\right\}\pi^{2m+4}.$$

よって Lemma 5 を用いると (2) が導かれる. この考察から (2) の一般化ができるのではと期待されるがこのアプローチでは残念ながらうまくいかない. ($\zeta(3,1,1,1)$ のような形は Corollary 12 では出てこない.)

参考文献

[1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, *A generating function for sums of multiple zeta values and its applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2007), 387–395.

[2] J. M. Borwein, D. M. Bradley, and D. J. Broadhurst, *Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k*, Electron. J. Combin. **4**, No. 2 (1997).

[3] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisonek, *Combinatorial aspects of multiple zeta values*, Electron. J. Combin. **5** (1998), Research Paper 38, 12pp. (electronic).

[4] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisonek, *Special values of multiple polylogarithms*, Trans. Amer. Math. Soc. **353**, No. 3 (2001), 907–941.

[5] D. Bowman and D. M. Bradley, *The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values*, J. of Combinatorial Theory, Series A **97** (2002), 43–61.

[6] W. Y. C. Chen and L. H. Sun, *Extended Zeilberger's Algorithm for Identities on Bernoulli and Euler Polynomials*, preprint, arXiv:math.NT/0810.0438.

[7] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic number theory (Kyoto, 1996), London Mth. Soc. Lecture Note Ser. **247**, Cambridge Univ. Press, Cambredge (1997), 95–101.

[8] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006).

[9] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.

[10] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[11] M. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra **262** (2003), 332–347.

[12] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda. *MZSVs vs. MZVs*, in preparation.

[13] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.

[14] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, preprint, arXiv: math.NT/0702824.

[15] S. Muneta, *On some explicit evaluations of multiple zeta-star values*, J. Number Theory **128** (2008), 2538–2548.

[16] S. Muneta, *A note on evaluations of multiple zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 931–935.

[17] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[18] Y. Yamasaki, *Evaluatios of mutiple Dirichlet L-values via symmetric functions*, arXiv:0712. 1639.

[19] D. Zagier, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, Bonn, (1995).

[20] S. A. Zlobin, *Generating functions for the values of a multiple zeta function*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. No. 2 (2005), 55–59; English transl., Moscow Univ. Math. Bull. **60**:2 (2005), 44–48.