$Sp(2,\mathbb{R})$ の大きな離散系列表現に関する重複度公式

若槻 聡 (金沢大学)

1 Introduction

$\Gamma(1)$ を $Sp(2,\mathbb{Z})$ とし, $\Gamma(N)$ を $\Gamma(1)$ のレベル N の主合同部分群とする. 本稿の目的は任意の $N\geq 1$ について $L^2(\Gamma(N)\backslash Sp(2,\mathbb{R}))$ の離散スペクトルにおける大きな離散系列表現の重複度について明示公式を与えることである.

$Sp(2,\mathbb{R})$ は正則 (または反正則) 離散系列表現と大きな離散系列表現と呼ばれる, 2 種類の二乗可積分な既約ユニタリ表現を持つ. Γ を $Sp(2,\mathbb{Q})$ の算術的部分群とする. $L^2(\Gamma\backslash Sp(2,\mathbb{R}))$ における正則離散系列表現の重複度は, ある重さと Γ に関する 2 次の正則ジーゲルカスプ形式の空間の次元と一致することが知られている. 2 次の正則ジーゲルカスプ形式の空間の次元公式は, Igusa を始めとする多くの研究者によって, すでに多くの場合に与えられている. 本稿の研究は, 従来の正則離散系列表現の重複度ではなく, 大きな離散系列表現の重複度に関する研究である. 大きな離散系列表現の重複度も, ある非正則なベクトル値ジーゲル保型形式の空間の次元と一致することが知られている. このことについては, [17, 18] を参照されたい.

重複度公式の応用として, $\Gamma(1)$ の場合に, 正則離散系列表現と大きな離散系列表現の重複度についての関係式を与える. さらに, その関係式より, $\Gamma(1)$ の保型形式に関する予想をいくつか与える. 次元の比較によってジーゲル保型形式を研究する手法は, Ibukiyama により数多く実行されており (例えば [12]), 本稿の手法はその手法に倣っている. また我々の関係式は, アーサー予想によって解釈できることに注意する (cf. [2, 10]).

大きい離散系列表現の重複度公式の証明は, 我々の従来の正則ジーゲルカスプ形式の空間の次元公式 (主に [21, 23] を用いる), アーサーの閉公式 [3], $\Gamma(1)$ の捻じれ元の共役類の情報 [6, 7, 22], の三つの情報を組み合わせることで可能となった. ページの制約から本稿では証明の概略についてのみ述べる.

2 準備

このセクションでは, 重複度と離散系列表現の定義や性質について解説する. まずは記号を準備する. 2 次のシンプレクティック群を次のように定義する.

$$G(\mathbb{R})=Sp(2,\mathbb{R})=\left\{g\in GL(4,\mathbb{R})\;\middle|\; g\begin{pmatrix} & I_2\\ -I_2 & \end{pmatrix}{}^tg=\begin{pmatrix} & I_2\\ -I_2 & \end{pmatrix}\right\}.$$

ただし, I_2 は 2 次の単位行列とする. Γ を $G(\mathbb{Q})$ の算術的部分群とする. 次に $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ の L^2 空間を考えよう. $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ 上には右正則表現により $G(\mathbb{R})$ の作用が自然に入っている. そして, 空間 $L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ は

$$L^2(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))=L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))\oplus L^2_{\mathrm{cont}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$$

と離散スペクトル $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ と連続スペクトル $L^2_{\mathrm{cont}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ と呼ばれる部分空間の直交直和に分解する. $L^2_{\mathrm{cont}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ はアイゼンシュタイン級数によって記述されることが知られている (cf. [16]). $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R}))$ は次のように既約ユニタリ表現のヒルベルト空間の可算な直交直和に分解する.

$$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G(\mathbb{R})) \cong \bigoplus_{\pi\in\widehat{G(\mathbb{R})}} m(\pi,\Gamma)\cdot H_\pi.$$

ただし, $\widehat{G(\mathbb{R})}$ は $G(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の集合とし, π は既約ユニタリ表現, H_π は π のヒルベルト空間とする. そして $m(\pi,\Gamma)$ は非負整数であり, π の重複度と呼ばれる. 我々の目的は, 離散系列表現 π の重複度 $m(\pi,\Gamma)$ を具体的に計算することである.

$G(\mathbb{R})$ の離散系列表現の Harish-Chandra parameter について解説する. 離散系列表現は二乗可積分な既約ユニタリ表現である. 離散系列表現のユニタリ同値類は Harish-Chandra parameter でパラメータライズされる. $G(\mathbb{R})$ の場合は, 集合 $H=\{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2\,|\,m_1>m_2,\ m_1+m_2\neq 0,\ m_1,m_2\neq 0\}$ の元と離散系列表現の同値類が一対一に対応する. 対応を具体的に与える前に, 極小 K-タイプについて説明する. $G(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群が

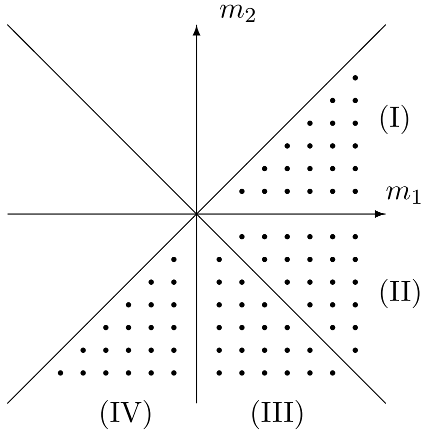
$$K(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ -B & A\end{pmatrix}\in G(\mathbb{R})\right\}\cong U(2)$$

と取れる. π を $G(\mathbb{R})$ の離散系列表現としよう. そのとき, $\pi|_{K(\mathbb{R})}\cong\sum_{\tau\in\widehat{K(\mathbb{R})}} n_\tau\tau$ と直交分解する. π はユニタリ表現なので重複度 n_τ は非負整数である. $n_\tau>0$ となるような τ のことを π の K-タイプと呼ぶ. π は離散系列表現なので, $n_\tau=1$ で π を定めるような K-タイプ τ が存在し, その τ のことを極小 K-タイプと呼ぶ. 詳しくは [14] などを見てください. $\det^k\otimes Sym_j$ を k 次の determinant と j 次の対称テンソル表現とのテンソルによる K の有限次元表現とする. K の既約ユニタリ表現は, 同値を除いて, $\det^k\otimes Sym_j$ で定められる. 次のように Harish-Chandra parameter $(m_1,m_2)\in H$ と離散系列表現 $D(m_1,m_2)$ を対応させる.

(I) $m_1>m_2>0$ のとき, $D(m_1,m_2)$ は正則離散系列表現と呼ばれ,
その極小 K-タイプは $\det^{m_2+2}\otimes Sym_{m_1-m_2-1}$ とする.

(II)(III) $m_1>0>m_2$ のとき, $D(m_1,m_2)$ は大きな離散系列表現と呼ばれ,
その極小 K-タイプは (II) $m_1>-m_2$ ならば $\det^{m_2}\otimes Sym_{m_1-m_2+1}$,
(III) $m_1<-m_2$ ならば $\det^{m_2-1}\otimes Sym_{m_1-m_2+1}$ とする.

(IV) $0>m_1>m_2$ のとき, $D(m_1,m_2)$ は反正則離散系列表現と呼ばれ,
その極小 K-タイプは $\det^{m_2-1}\otimes Sym_{m_1-m_2-1}$ とする.



以後, パラメーター (l_1, l_2) を,

$$(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad l_1 > l_2 > 0$$

と一つ固定する. つまり (l_1, l_2) は図の (I) に属する. $(l_1, -l_2)$ は (II), $(l_2, -l_1)$ は (III), $(-l_2, -l_1)$ は (IV) に属する. 集まり $\{D(l_1, l_2),\ D(l_1, -l_2),\ D(l_2, -l_1),\ D(-l_2, -l_1)\}$ は $G(\mathbb{R})$ における L-packet になる.

正則ジーゲルカスプ形式について説明する. $\rho = \det^k \otimes Sym_j$ と置く. このとき, ρ は $GL_2(\mathbb{C})$ から $GL_{j+1}(\mathbb{C})$ への有理表現としてよい. 次に 2 次のジーゲル上半空間 H_2 を

$$H_2 = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \,|\, Z = {}^tZ,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\}$$

と定める. $\mathrm{Im}(Z) > 0$ は正定値対称行列であることを意味する. $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R})$ は $Z \in H_2$ に対して $g \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ と作用する. $S_{k,j}(\Gamma)$ を次の性質を満たす H_2 から $\mathbb{C}^{j+1}$ への正則関数 f からなる空間とする; (1) $f(\gamma \cdot Z) = \rho(CZ + D)f(Z)$ for all $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$, $Z \in H_2$, (2) $\sup_{Z \in H_n} |\rho(\mathrm{Im}(Z)^{1/2})f(Z)|_{\mathbb{C}^{j+1}} < +\infty$. $S_{k,j}(\Gamma)$ のことを Γ に関する重さ ρ の 2 次の正則ジーゲルカスプ形式の空間と呼ぶ. また $S_{k,j}(\Gamma)$ の元のことを 2 次の正則ジーゲルカスプ形式と呼ぶ.

正則離散系列表現の重複度とジーゲルカスプ形式の空間の次元の関係は次のように与えられる.

$$j = l_1 - l_2 - 1, \quad k = l_2 + 2$$

と置く. このとき,

$$m(D(l_1, l_2), \Gamma) = \dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma)$$

が成り立つことが知られている (cf. [24]). 離散系列表現の重複度の間には, 複素共役を取ることで, 簡単に次のような関係があることが分かる.

$$m(D(l_1, l_2), \Gamma) = m(D(-l_2, -l_1), \Gamma), \quad ((\mathrm{I}) \leftrightarrow (\mathrm{IV})),$$
$$m(D(l_1, -l_2), \Gamma) = m(D(l_2, -l_1), \Gamma), \quad ((\mathrm{II}) \leftrightarrow (\mathrm{III})).$$

正則ジーゲルカスプ形式の空間の次元公式 $\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma) = m(D(l_1, l_2), \Gamma) = m(D(-l_2, -l_1), \Gamma)$ については, 主要な算術的部分群に対して計算可能な明示公式が, すでに多くの場合に与えられている. 我々の問題は, 大きな離散系列表現の重複度 $m(D(l_1, -l_2), \Gamma) = m(D(l_2, -l_1), \Gamma)$ に対して計算可能な明示公式を与えることである.

3 重複度公式

このセクションでは我々の主結果について述べる. 次の算術的部分群に対して重複度公式を与える:

$$\Gamma(1) = Sp(2, \mathbb{Z}), \quad \Gamma(N) = \{\gamma \in \Gamma(1) \,|\, \gamma \equiv I_4 \bmod N\}.$$

Theorem 3.1. $l_1 - l_2 = j + 1 > 1$, $l_2 = k - 2 > 2$ とする. $N \geq 3$ とする. そのとき,

$$m(D(l_1, -l_2), \Gamma(N)) = [\Gamma(1) : \Gamma(N)] \left\{ 2^{-8}3^{-3}5^{-1} l_1 l_2 (l_1^2 - l_2^2) + 2^{-6}3^{-2}(l_1^2 - l_2^2)N^{-2} \right.$$
$$\left. - 2^{-5}3^{-1}(l_1 - l_2)N^{-3} - 2^{-4}3^{-1}(l_1 + l_2)N^{-3} + 2^{-3}N^{-4} \right\}.$$

ただし

$$[\Gamma(1):\Gamma(N)] = N^{10} \prod_{p|N,\ p:\mathrm{prime}} (1-p^{-2})(1-p^{-4}).$$

$\Gamma(N)$, $N \geq 3$ は torsion free なので現れる項が少ない.

Theorem 3.2. $l_1 - l_2 = j+1 > 1$, $l_2 = k-2 > 2$ とする. $l_1 - l_2 - 1 = j$ を偶数とする. そのとき,

$$\begin{aligned} m(D(l_1,-l_2),\Gamma(2)) = {} & 2^{-3}3^{-1}l_1l_2(l_1^2-l_2^2) + 2^{-3}\cdot 5(l_1^2-l_2^2) \\ & - 2^{-3}\cdot 3\cdot 5(l_1-l_2) - 2^{-2}\cdot 3\cdot 5(l_1+l_2) + 2^{-2}\cdot 3^2\cdot 5 \\ & + 2^{-3}\cdot 5(-1)^{l_2}l_1l_2 - 2^{-3}\cdot 3\cdot 5(-1)^{l_2}(l_1+l_2) + 2^{-3}\cdot 3^2\cdot 5(-1)^{l_2}. \end{aligned}$$

$\Gamma(2)$ は固有値 $1, -1$ の捻じれ元を含むので, 項が多くなる. また $-I_4$ を $\Gamma(2)$ が含むので, 極小 K-タイプの表現を見れば明らかなように, j が奇数であるような表現は現れない.

$l_1 - l_2 = j+1 > 1$, $l_2 = k-2 > 2$ の場合の正則離散系列表現の重複度についても書いておく. ただし, $\Gamma(2)$ の場合は, j は偶数とする. これらの計算は [21, 23] による.

$$\begin{aligned} m(D(l_1,l_2),\Gamma(N)) = {} & [\Gamma(1):\Gamma(N)]\left\{2^{-8}3^{-3}5^{-1}l_1l_2(l_1^2-l_2^2) - 2^{-6}3^{-2}(l_1^2-l_2^2)N^{-2}\right. \\ & \left. -2^{-5}3^{-1}(l_1-l_2)N^{-3} + 2^{-4}3^{-1}(l_1-l_2)N^{-3}\right\} \\ & (= \dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma(N))). \\ m(D(l_1,l_2),\Gamma(2)) = {} & 2^{-3}3^{-1}l_1l_2(l_1^2-l_2^2) - 2^{-3}\cdot 5(l_1^2-l_2^2) \\ & - 2^{-3}\cdot 3\cdot 5(l_1-l_2) + 2^{-2}\cdot 3\cdot 5(l_1-l_2) \\ & + 2^{-3}\cdot 5(-1)^{l_2}l_1l_2 - 2^{-3}\cdot 3\cdot 5(-1)^{l_2}(l_1+l_2) + 2^{-3}\cdot 3^2\cdot 5(-1)^{l_2} \\ & (= \dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma(2))). \end{aligned}$$

比較すると大きな離散系列表現の方が項が多いことが, すぐに分かる. この違いは主に離散系列表現の指標の違いから来ていると考えられる. 具体的に重複度の数値を見てみよう.

$\Gamma(2)$ に関する大きな離散系列表現の重複度の具体例.

j ╲ k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	9	26	40	90	105	204	216	380	385	630	624
4	50	95	140	240	300	475	550	820	910	1295	1400
6	120	205	295	461	584	855	1015	1415	1616	2169	2415
8	225	364	515	765	971	1360	1629	2185	2525	3276	3695
10	371	580	810	1164	1475	2006	2410	3150	3659	4640	5266

$\Gamma(2)$ に関する正則離散系列表現の重複度の具体例. (Tsushima, W.)

j ╲ k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	9	26	40	90	105	204	216	380	385	630	624
4	30	70	110	205	260	430	500	765	850	1230	1330
6	70	145	225	381	494	755	905	1295	1486	2029	2265
8	135	259	395	630	821	1195	1449	1990	2315	3051	3455
10	231	420	630	964	1255	1766	2150	2870	3359	4320	4926

数値を見れば明らかなように $\Gamma(2)$ の場合は, 大きな離散系列表現の重複度の方が多いことがすぐに分かる. $\Gamma(N)$ $N \geq 3$ の場合も同様に大きな離散系列表現の重複度の方が多い. $\Gamma(N)$ の場合は New form の構造が複雑なので, この重複度の差を明確に説明することは難しい. おそらく Yoshida lift type (Endoscopic type) と呼ばれる保型形式が, 大きな離散系列表現の側に多く存在するためだと予想される (cf. [2, 10]).

次に $\Gamma(1)$ に関する重複度公式について述べる. 記号 $t = [t_0, t_1, \ldots, t_{l-1}; l; m]$ は, もし $m \equiv n \pmod{l}$ であるなら $t = t_n$ を意味する. $\Gamma(2)$ と同様, $-I_4 \in \Gamma(1)$ なので, j が奇数であるような表現は現れない.

Theorem 3.3. $l_1 - l_2 = j + 1 > 1$, $l_2 = k - 2 > 2$ とする. $l_1 - l_2 - 1 = j$ を偶数とする.

$$
\begin{aligned}
& m(D(l_1, -l_2), \Gamma(1)) \\
&= 2^{-7}3^{-3}5^{-1}(j+1)(k-2)(j+k-1)(j+2k-3) + 2^{-5}3^{-2}(j+1)(j+2k-3) \\
&\quad - 2^{-3}3^{-1}(j+2k-3) - 2^{-4}3^{-1}(j+1) + 2^{-2} + 2^{-7}3^{-2}7(-1)^k(k-2)(j+k-1) \\
&\quad - 2^{-4}3^{-1}(-1)^k(j+2k-3) + 2^{-5}5(-1)^k \\
&\quad + 2^{-5}3^{-1}[(-1)^{j/2}(k-2), -(j+k-1), (-1)^{j/2+1}(k-2), (j+k-1); 4; k] \\
&\quad - 2^{-3}[(-1)^{j/2}, -1, (-1)^{j/2+1}, 1; 4; k] \\
&\quad + 2^{-3}3^{-3}([(j+k-1), -(j+k-1), 0; 3; k] + [(k-2), 0, -(k-2); 3; j+k]) \\
&\quad - 2^{-2}3^{-2}([1, -5, -4; 3; k] + [5, 4, -1; 3; j+k]) \\
&\quad + 2^{-3}3^{-2}([-(j+k-1), -(j+k-1), 0, (j+k-1), (j+k-1), 0; 6; k] \\
&\qquad\qquad + [(k-2), 0, -(k-2), -(k-2), 0, (k-2); 6; j+k]) \\
&\quad - 2^{-2}3^{-1}([-1, -1, 0, 1, 1, 0; 6; k] + [1, 0, -1, -1, 0, 1; 6; j+k]) \\
&\quad - 2^{-7}(-1)^{j/2}(j+2k-3) - 2^{-7}3^{-1}5(-1)^{j/2+k}(j+1) + 2^{-3}(-1)^{j/2+k} \\
&\quad - 2^{-2}3^{-3}(j+2k-3)[1, -1, 0; 3; j] - 2^{-1}3^{-3}(j+1)[0, 1, -1; 3; j+2k] \\
&\quad + 2^{-1}3^{-1}[0, 1, -1; 3; j+2k] + 2^{-2}3^{-1}(-1)^{j/2+k}[1, -1, 0; 3; j] \\
&\quad + 2^{-2}3^{-1}C_1 + 3^{-2}C_2 + 5^{-1}C_3 + 2^{-3}C_4,
\end{aligned}
$$

ここで $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$
C_1 = \begin{cases}
[1, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1; 12; k] & (j = 12n) \\
[-1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0; 12; k] & (j = 12n+2) \\
[1, -1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 1, -1; 12; k] & (j = 12n+4) \\
[-1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 0, 1, -1, 1; 12; k] & (j = 12n+6) \\
[1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0; 12; k] & (j = 12n+8) \\
[-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, -1; 12; k] & (j = 12n+10),
\end{cases}
$$

$$
C_2 = \begin{cases}
[1, 0, 0, -1, 0, 0; 6; k] & (j = 6n) \\
[-1, 1, 0, 1, -1, 0; 6; k] & (j = 6n+2) \\
[0, -1, 0, 0, 1, 0; 6; k] & (j = 6n+4),
\end{cases}
$$

$$C_3 = \begin{cases} [1,0,0,-1,0;5;k] & (j=10n) \\ [-1,1,0,0,0;5;k] & (j=10n+2) \\ 0 & (j=10n+4) \\ [0,0,0,1,-1;5;k] & (j=10n+6) \\ [0,-1,0,0,1;5;k] & (j=10n+8), \end{cases}$$

$$C_4 = \begin{cases} [1,0,0,-1;4;k] & (j=8n) \\ [-1,1,0,0;4;k] & (j=8n+2) \\ [-1,0,0,1;4;k] & (j=8n+4) \\ [1,-1,0,0;4;k] & (j=8n+6). \end{cases}$$

この定理から具体的に重複度を計算することができる．具体的な数値を見てみよう．正則離散系列表現に関しては, [21, 23] の結果による．

$\Gamma(1)$ に関する大きな離散系列表現の重複度の具体例．

$j \diagdown k$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	3	1
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	1	3	1	4	2	6	3
6	0	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	5	3	7	4	9	6
8	0	0	0	1	1	2	1	3	2	5	4	7	5	9	7	13	10
10	1	1	1	2	2	4	3	5	4	8	7	11	9	14	12	19	16

$\Gamma(1)$ に関する正則離散系列表現の重複度の具体例．(Tsushima, W.)

$j \diagdown k$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	3	1
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	1	3	1	4	2	6	3
6	0	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	5	3	7	4	9	6
8	0	0	0	1	1	2	1	3	2	5	4	7	5	9	7	13	10
10	0	0	0	0	1	2	1	3	2	5	5	8	6	11	9	15	13

$\Gamma(1)$ の場合も $j \geq 10$ について大きな離散系列表現の方が重複度が大きくなることが分かる $\Gamma(1)$ に関する正則離散系列表現と大きな離散系列表現の重複度の差は何を表わしているのか考えよう．[23] の公式と比較すると以下の公式を得る．

Theorem 3.4. $l_1 - l_2 = j+1 > 1$, $l_2 = k-2 > 2$ とする．j は偶数とする．そのとき

$$m(D(l_1,-l_2),\Gamma(1)) - m(D(l_1,l_2),\Gamma(1)) = \dim_{\mathbb{C}} S_{j+2}(SL(2,\mathbb{Z})) \times \dim_{\mathbb{C}} S_{j+2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$$

が成り立つ．ただし, $\dim_{\mathbb{C}} S_l(SL(2,\mathbb{Z}))$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ に関する重さ l の一変数正則カスプ形式の空間の次元とする．l を 4 以上の偶数とすると,

$$\dim_{\mathbb{C}} S_l(SL(2,\mathbb{Z})) = \frac{l-1}{12} + \frac{1}{4}\cdot(-1)^{l/2} + \frac{1}{3}\cdot[1,0,-1;3;l] - \frac{1}{2}$$

となることが知られている．

この関係式を解釈する前に, いくつかの注意を与える. まず $\Gamma(1)$ の Hecke eigen ジーゲルカスプ形式は, すべて new form であることに注意しよう. そして保型表現として重複度 1 が成り立つことが予想されている. また generic packet conjecture より tempered な保型表現の L-packet には, globally generic な保型表現が含まれていることが予想される. またアーサー予想より, すべての有限素点で不分岐な $GSp(2)$ の cuspidal な既約保型表現が Yoshida lift type (Endoscopic type) である場合は, その無限素点での表現は generic であることが予想される. 大きな離散系列表現は generic, 正則離散系列表現は non-generic であることが知られている. tempered な (おそらくマース空間に属さない)Hecke eigen な $\Gamma(1)$ に関する正則ジーゲルカスプ形式の L-packet には, 無限素点の表現が大きな離散系列表現であり, すべての有限素点が不分岐であるような, trivial centeral character を持つ $GSp(2)$ の cuspidal な既約保型表現が含まれることが予想される.

この関係式の持つ意味を説明する. 定理の条件の $l_1-l_2 = j+1 > 1$, $l_2 = k-2 > 2$ を仮定する. そうすると, これらの予想と事実から, 差の値 $\dim_{\mathbb{C}} S_{j+2}(SL(2,\mathbb{Z})) \times \dim_{\mathbb{C}} S_{j+2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ は, $S_{j+2}(SL(2,\mathbb{Z})) \times S_{j+2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ から, 無限素点の表現が $D(l_1,-l_2)$ であり, すべての有限素点が不分岐であるような, trivial centeral character を持つ $GSp(2)$ の cuspidal な既約保型表現へのリフトの存在を意味していると予想される. また, 無限素点の表現が $D(l_1,-l_2)$ であり, すべての有限素点が不分岐であるような, trivial centeral character を持つ $GSp(2)$ の cuspidal な既約保型表現は, $\Gamma(1)$ の重さ $\det^k \otimes Sym_j$ の Hecke eigen な正則ジーゲルカスプ形式から得られる L-packet に含まれるか, もしくは $S_{j+2}(SL(2,\mathbb{Z})) \times S_{j+2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ から来る Yoshida lift type であることが予想される.

このような関係式は $j=0$, $k>4$ の場合も得ることができる. エラー項が現れるため, 大きな離散系列表現の重複度の具体的な数値を得ることは出来ないが, 上述のように関係式から予想を得ることができる. [6] の公式を用いて次の比較が得られる. エラー項は Hiraga[9] の結果から従う.

Theorem 3.5. *$l_1-l_2 = j+1 = 1$, $l_2 = k-2 > 2$, (つまり $j=0$) とする. このとき*

$$m(D(k-1,-k+2),\Gamma(1)) - m(D(k-1,k-2),\Gamma(1)) = -\dim_{\mathbb{C}} S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z})) + m(\sigma_k,\Gamma(1)).$$

既約ユニタリ表現 σ_k について説明する. 重複度 $m(\sigma_k,\Gamma(1))$ が計算過程でおきるエラー項である. P を $G(\mathbb{R})$ のジーゲル放物型部分群としよう. つまり $P = MAN$ をラングランズ分解としたとき, $M \cong \{m \in GL(2,\mathbb{R}) \mid \det(m) = \pm 1\}$, $A \cong \mathbb{R}_{>0}$, $N \cong \{n \in M(2,\mathbb{R}) \mid n = {}^t n\}$, となる. D_k を極小 K-タイプが $\det^k$ であるような M の離散系列表現とする. また A の quasi-character ν_1 を $\nu_1(a) = a$ で定める. これらの定義の下, σ_k を誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^{G(\mathbb{R})}(D_4 \otimes \nu_1 \otimes 1)$ のラングランズ商として定義する. σ_k はユニタリ化可能である. また σ_k は non-tempered な表現であることが知られている. [1] より σ_k の A-packet は $\{\sigma_k,\ D(k-1,k-2),\ D(-k+2,-k+1)\}$ となる.

定理の関係式の意味を考えよう. k が偶数であるときに, $S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ から $S_{k,0}(\Gamma^2(1))$ への Saito-Kurokawa lift が存在することは良く知られている (cf. [4]). k が奇数の場合には, $S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ から σ_k に関連した保型形式 (もしくは σ_k を無限素点での表現とする保型表現) へのリフトが, Miyazaki [15], Schmidt [19, 20] によって構成されている. つまり, 関係式に含まれる式

$$\dim_{\mathbb{C}} S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z})) - m(\sigma_k,\Gamma(1))$$

は $S_{k,0}(\Gamma(1))$ のマース空間の次元と一致すると予想される. k が奇数のときの $S_{2k-2}(SL(2,\mathbb{Z}))$ から σ_k に関連した保型形式へのリフトは全単射であることが予想される. これらの考察から,

無限素点の表現が $D(k-1,-k+2)$ であり, すべての有限素点が不分岐であるような, trivial centeral character を持つ $GSp(2)$ の cuspidal な既約保型表現は, マース空間に属さない $\Gamma(1)$ の重さ $\det^k$ の Hecke eigen な正則ジーゲルカスプ形式から得られる L-packet に含まれると予想される.

我々の $\Gamma(1)$ の重複度公式の応用として, Ichino [13] の研究に言及したい. [13] においては, 無限素点の表現が大きな離散系列表現もしくはその極限であり, すべての有限素点での表現が不分岐であるような $GSp(2)$ の cuspidal な既約な保型表現の Adjoint L-function の Critical value が研究されている. 我々の結果は, そのような保型表現の存在を示してる.

4 証明の概略

最後に定理 3.1, 3.2, 3.3 の証明の概略について述べる. 一般的な代数群と条件の下で, Arthur [3] によって, 一つの L-packet に含まれる離散系列表現全体の重複度の和に関する公式が与えられた. (Goresky-Kottwitz-MacPherson [5] によって別証明が与えられている.) つまり, $G(\mathbb{R})=Sp(2,\mathbb{R})$ の場合にその公式を適用すると, $l_1-l_2>1$, $l_2>1$ の条件の下で,

$$m(D(l_1,l_2),\Gamma)+m(D(l_1,-l_2),\Gamma)+m(D(l_2,-l_1),\Gamma)+m(D(-l_2,-l_1),\Gamma)$$

を, 離散系列表現の指標, 基本領域の体積, 有限素点上の積分の三つの値を $G(\mathbb{Q})$-共役類ごとに足し合わせた式で表すことができる. 離散系列表現の指標に関しては, [11, 8] などによって明示公式が知られている. 有限素点上の積分に関しては, 積分を有限素点全体で考えて Γ-共役類の言葉に書きかえたのち, Γ-共役類の情報 [22, 6, 7] を用いて計算することができる. 有限素点上の積分については直接計算をしなくてはならない場合もある. 基本領域の体積に関しては, 良く知られている. そのため, 我々はこの四つの重複度の和の値を明示的に計算することができる.

先に説明したように,

$$m(D(l_1,l_2),\Gamma)=m(D(-l_2,-l_1),\Gamma),\quad m(D(l_1,-l_2),\Gamma)=m(D(l_2,-l_1),\Gamma)$$

が成り立つ. また $m(D(l_1,l_2),\Gamma)=\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma)$ が成り立ち, $\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma)$ の明示公式は多くの場合に計算されている. $l_1-l_2>1$, $l_2>2$ における, $\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma(N))$ の明示公式は, [21, 23] で計算されいる. したがって, 上の四つの和の値の 1/2 倍から $\dim_{\mathbb{C}} S_{k,j}(\Gamma)$ の値を引けば, $m(D(l_1,-l_2),\Gamma)$ の値が得られる. $\Gamma(1)$ については, 同じ跡公式から得られた [6, 23] の明示公式を用いる方が, 各寄与の比較が易しい.

参考文献

[1] J. Adams, J. F. Johnson, Endoscopic groups and packets of nontempered representations, Compositio Math. **64** (1987), 271–309.

[2] J. Arthur, On some problems suggested by the trace formula Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983) Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **1041** (1984), 1–49.

[3] J. Arthur, The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators, Inv. Math. **97** (1989), 257–290.

[4] M. Eichler, D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Prog. in Math. **55**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[5] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators. Duke Math. J. **89** (1997), 477–554.

[6] K. Hashimoto, The dimension of the spaces of cusp forms on Siegel upper half-plane of degree two I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA **30** (1983), 403–488.

[7] K. Hashimoto, T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 549–601.

[8] R. Herb, Characters of averaged discrete series on semi-simple real Lie groups, Pac. J. Math. **80** (1979), 169–177.

[9] K. Hiraga, On the multiplicities of the discrete series of semisimple Lie groups, Duke Math. J. **85** (1996), 167–181.

[10] K. Hiraga, Endoscopy on $GSp(4)$, 第 9 回オータムワークショップ報告集.

[11] T. Hirai, Explicit form of the characters of discrete series representations of semisimple Lie groups, Harmonic analysis on homogenous spaces, Proc. Sympos. Pure Math. (Amer. Math. Soc.) **26** (1972), 281–288.

[12] T. Ibukiyama, On relations of dimensions of automorphic forms of $Sp(2, R)$ and its compact twist $Sp(2)$ (I), Automorphic forms and number theory, Adv. Stud. Pure Math. **7** (1985), 7–30.

[13] A. Ichino, On critical values of adjoint L-functions for $GSp(4)$, preprint.

[14] W. Knapp, Representation theory of semisimple groups, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[15] T. Miyazaki, On Saito-Kurokawa lifting to cohomological Siegel modular forms, Manuscripta Math. **114** (2004), 139–163.

[16] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, Spectral Decomposition and Eisenstein Series, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 113, Cambridge University Press, 1995.

[17] 織田孝幸, 早田孝博, Toward dimension formula of automorphic forms associated to the integrable middle discrete series of $SU(2, 2)$, 第 3 回オータムワークショップ報告集.

[18] 高瀬幸一, 保型形式の次元公式と概均質ベクトル空間, 第 10 回整数論サマースクール報告集.

[19] R. Schmidt, The Saito-Kurokawa lifting and functoriality, Amer. J. Math. **127** (2005), 209–240.

[20] R. Schmidt, On classical Saito-Kurokawa liftings, J. Reine Angew. Math. **604** (2007), 211–236.

[21] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to $Sp(2,\mathbb{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser A **59** (1983), 139–142.

[22] K. Ueno, On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2. I. Singular fibres of the first kind. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **18** (1971), 37–95; II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **19** (1972), 163–199.

[23] S. Wakatsuki, Dimension formula for the spaces of Siegel cusp forms of degree two, preprint.

[24] N. Wallach, On the constant term of a square integrable automorphic form, Operator algebras and group representations, Vol. II (Neptun, 1980), 227–237, Monogr. Stud. Math. 18, Pitman, Boston, MA, 1984.