モックテータ関数の関係式

真田 ゆかり (津田塾大学)

1　記号の定義

q は $|q|<1$ を満たす任意の複素数とし, 次の記号を使う.

$$(a;q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i),\quad (a;q)_\nu = (a)_\nu := \frac{(a)_\infty}{(aq^\nu)_\infty},$$

$$(a_1,a_2,\ldots,a_r)_\infty := (a_1)_\infty(a_2)_\infty\cdots(a_r)_\infty,\quad (a_1,a_2,\ldots,a_r)_\nu := (a_1)_\nu(a_2)_\nu\cdots(a_r)_\nu.$$

Jacobi の三重積公式により次が成り立つ.

$$j(x,q) := (x)_\infty(q/x)_\infty(q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

また, q-超幾何級数 ${}_r\psi_r$ は

$${}_r\psi_r\left[\begin{matrix} a_1,a_2,\ldots,a_r \\ b_1,b_2,\ldots,b_r \end{matrix};q,x\right] := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\ldots,a_r)_\nu}{(b_1,b_2,\ldots,b_r)_\nu}x^\nu,\qquad \left(\left|\frac{b_1\cdots b_r}{a_1\cdots a_r}\right| < |x| < 1\right)$$

の形で定義され, 次の公式がよく知られている.

◆ Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 和公式◆

$${}_1\psi_1\left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix};q,z\right] = \frac{(az)_\infty(q)_\infty(b/a)_\infty(q/az)_\infty}{(z)_\infty(b)_\infty(q/a)_\infty(b/az)_\infty},\qquad \left(\left|\frac{b}{a}\right| < |z| < 1\right). \tag{1}$$

q-超幾何級数のパラメータに very-well-poised と呼ばれるバランス条件を付けた, もっとも簡単なものが次の公式である.

◆ Bailey の ${}_6\psi_6$ 和公式◆

$$\begin{aligned}&{}_6\psi_6\left[\begin{matrix} q\sqrt{a}, & -q\sqrt{a}, & b, & c, & d, & e \\ \sqrt{a}, & -\sqrt{a}, & aq/b, & aq/c, & aq/d, & aq/e \end{matrix};q,\frac{qa^2}{bcde}\right] \\ &= \frac{(aq,aq/bc,aq/bd,aq/be,aq/cd,aq/ce,aq/de,q,q/a)_\infty}{(aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,q/b,q/c,q/d,q/e,qa^2/bcde)_\infty},\end{aligned} \tag{2}$$

ただし $\left|qa^2/bcde\right| < 1$.

特に等式 (1) で, $b=q$ とすると q-二項定理が得られる:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(a)_\nu}{(q)_\nu}z^\nu = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}.$$

1930 年から 1950 年にかけて, このような q-超幾何級数に関する公式が Bailey, Jackson, Watson, Sears, Slater らによってたくさん発見された [14], [15]. 今日, これらの公式は多変数化, 楕円化など様々な形に発展しながら研究がなされている [7], [9].

2 Ramanujanの最後の手紙

まずはじめに, テータ関数を次で定義する.

定義 1. For $r \geq 0$, a *theta product* of the variables $q, x_1, \ldots, x_r$ is an expression of the form

$$Cq^e x_1^{f_1} \cdots x_r^{f_r} L_1^{g_1} \cdots L_s^{g_s},$$

where C is a complex number, $s \geq 0, e, f_i$ and g_i are integers, and each L_i has the form

$$j(Dq^h x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}, \zeta q^m)$$

for some complex number D, integers h, k_i and $m \geq 1$, and a root of unity ζ. A *theta function* is a sum of finitely many theta products.

モックテータ関数は, 1920年にRamanujanがHardyへ宛てた最後の手紙に登場する. モックテータ関数の定義は手紙の中で明らかにされておらず, 未だに議論がなされているが, Andrews, Hickersonらにより次のように与えられている [2].

定義 2. A *mock theta function* is a function $f(q)$ defined by a q-series which converges for $|q| < 1$ and which satisfies the following two conditions:
(a) For every root of unity ζ, there is a theta function $\theta_\zeta(q)$ such that the difference $f(q) - \theta_\zeta(q)$ is bounded as $q \to \zeta$ radially.
(b) There is no single theta function which works for all ζ: i.e., for every theta function $\theta(q)$ there is some root of unity ζ for which $f(q) - \theta(q)$ is unbounded as $q \to \zeta$ radially.

さて, Ramanujanの手紙には, 位数3, 5, 7の全部で17個のモックテータ関数が登場する.

位数3のモックテータ関数

$$\begin{aligned}
f(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q)_n^2}, \\
\phi(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q^2; q^2)_n}, \\
\psi(q) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q^2)_n}, \\
\chi(q) &:= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{\prod_{m=1}^{n}(1 - q^m + q^{2m})}.
\end{aligned}$$

位数 5 のモックテータ関数

$$\begin{aligned}
f_0(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q)_n}, \\
\phi_0(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}(-q;q^2)_n, \\
\psi_0(q) &:= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n+1)/2}(-q)_{n-1}, \\
F_0(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q;q^2)_n}, \\
\chi_0(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q^{n+1})_n} \\
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{(q^{n+1})_{n+1}}, \\
f_1(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(-q)_n}, \\
\phi_1(q) &:= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(-q;q^2)_{n-1}, \\
\psi_1(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2}(-q)_n, \\
F_1(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}}, \\
\chi_1(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q^{n+1})_{n+1}}.
\end{aligned}$$

位数 7 のモックテータ関数

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^{n+1})_n}, \\
\mathcal{F}_1(q) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^n)_n}, \\
\mathcal{F}_2(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q^{n+1})_{n+1}}.
\end{aligned}$$

位数の定義についても Ramanujan は何も述べておらず, 後の研究者たちによっても明確な定義が与えられていない. モックテータ関数の定義の条件 (b) が, モックテータ関数はテータ関数でないことを主張している. つまり個々のモックテータ関数は, それ自体がテータ関数で, つまり無限積で表せないのである.

手紙には, 以下のモックテータ関数の関係式も登場する. これらは, 2 つのモックテータ関数を合わせたものが, 無限積で表せることを表現している.

位数 3 の関係式

$$\begin{aligned}
2\phi(-q)-f(q) &= f(q)+4\psi(-q) \\
&= \frac{(q)_\infty}{(-q)_\infty}(-q)_\infty^{-1}, \\
4\chi(q)-f(q) &= \frac{3\ (q^3;q^3)_\infty^2}{(-q^3;q^3)_\infty^2}(q)_\infty^{-1}.
\end{aligned}$$

位数 5 の関係式

$$\begin{aligned}
\phi_0(-q)+\chi_0(q) &= 2F_0(q), \\
f_0(-q)+2F_0(q^2)-2 &= \vartheta_4(0,q)G(q), \\
\phi_0(-q^2)+\psi_0(-q) &= \vartheta_4(0,q)G(q), \\
2\phi_0(-q^2)-f_0(q) &= \vartheta_4(0,q)G(q), \\
\psi_0(q)-F_0(q^2)+1 &= q\psi(q^2)H(q^4), \\
\chi_1(q)-q^{-1}\phi_1(-q) &= 2F_1(q), \\
f_1(-q)-2qF_1(q^2) &= \vartheta_4(0,q)H(q), \\
q^{-1}\phi_1(-q^2)+\psi_1(-q) &= \vartheta_4(0,q)H(q), \\
2q^{-1}\phi_1(-q^2)+f_1(q) &= \vartheta_4(0,q)H(q), \\
\psi_1(q)-qF_1(q^2) &= \psi(q^2)G(q^4).
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\vartheta_4(0,q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} = \frac{(q)_\infty}{(-q)_\infty}, \\
\psi(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}, \\
G(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}, \\
H(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)(q^3;q^5)_\infty}.
\end{aligned}$$

位数 7 の関係式

Ramanujan は, 位数 7 のモックテータ関数の関係式はないと主張している.

以上の関係式は手紙の中では証明されておらず, 後に Andrews, Garvan, Watson 等により証明された [1], [18].

また Ramanujan の手紙には, 位数 3 の $f(q)$ について,

$$f(q) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q)_n^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)q^n$$

と q^n の係数を $\alpha(n)$ とおくと

$$\alpha(n) = (-1)^{n-1}\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{6}-\frac{1}{144}}\right)}{2\sqrt{n-\frac{1}{24}}} + O\left(\frac{\exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{6}-\frac{1}{144}}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right) \tag{3}$$

が成り立つことも挙げられている．Ramanujan は 式 (3) の証明も与えていなかったが, これは 1951 年に Dragonette により博士論文で証明された.

ここで挙げたモックテータ関数が全てではなく, 1936 年に Watson が位数 3 の関係式を証明する際, 次のモックテータ関数を追加した [18].

$$\begin{aligned}\nu(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(-q;q^2)_{n+1}},\\ \omega(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q;q^2)_{n+1}^2},\\ \rho(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{\prod_{m=0}^{n}(1+q^{2m+1}+q^{4m+2})}.\end{aligned}$$

後に Ramanujan の Lost Notebook から, これらの Watson のモックテータ関数をはじめ, 新たに位数 6 と位数 10 のモックテータ関数も発見される [2], [5], [6].

3 モックテータ関数の数論への応用

次に $\alpha(n)$ の応用について紹介する.

1 以上の整数 n に対して

$$p(n) := \sharp\{n \text{ の分割 }\},\quad p(0) := 1$$

とおくと次の関係が分かる:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q)_\infty}.$$

この $p(n)$ について次の公式が得られている.

Rademacher の公式 (1973). $I_s(x)$ を I-Bessel function of order s とすると次が成り立つ:

$$p(n) = 2\pi\,(24n-1)^{-\frac{3}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} \cdot I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi\sqrt{24n-1}}{6k}\right). \tag{4}$$

ただし

$$A_k(n) := \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{12}} \sum_{\substack{x \pmod{24k} \\ x^2 \equiv -24n+1 \pmod{24k}}} \chi_{12}(x)\cdot e\left(\frac{x}{12k}\right).$$

ここで

$$e(x) = e^{2\pi i x},\quad \chi_{12}(x) = \left(\frac{12}{x}\right) = \begin{cases} 1 & x \equiv 1, 11 \pmod{12} \\ -1 & x \equiv 5, 7 \pmod{12} \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

一方, Ramanujan は $p(n)$ に関する次の予想を立てていた:

$$\begin{cases} p(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7n+5) \equiv 0 \pmod{7}, \\ p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}. \end{cases}$$

Dyson はこれらの証明を与えようと, "分割の rank" という概念を導入した. 分割の rank とは, その分割の一番大きい part から parts の個数を引いたもので定義される. 例えば, 10 の分割 $(5,2,2,1)$ の rank は $5-4=1$. そこで

$$\begin{aligned} N(m,n) &:= \sharp\{\text{rank が } m \text{ となる } n \text{ の分割}\}, \\ N_e(n) &:= \sharp\{\text{rank が even となる } n \text{ の分割}\}, \\ N_o(n) &:= \sharp\{\text{rank が odd となる } n \text{ の分割}\}, \end{aligned}$$

とおくと

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} N(m,n)z^m q^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(zq)_n(z^{-1}q)_n}$$

が成り立つことが知られている. ここで $z=-1$ を代入すると右辺から位数 3 のモックテータ関数 $f(q)$ がでてくる:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(N_e(n)-N_o(n))q^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(-q)_n^2} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(n)q^n.$$

つまり $\alpha(n)$ の値が求まれば, 連立方程式

$$\begin{cases} p(n) = N_e(n)+N_o(n) \\ \alpha(n) = N_e(n)-N_o(n) \end{cases}$$

を解くことで $N_e(n)$ と $N_o(n)$ が定まる. $\alpha(n)$ の評価は Ramanujan の最後の手紙で与えられていたが, 1966 年に Andrews と Dragonette により次の予想が立てられた.

$$\alpha(n) = \pi(24n-1)^{-\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}A_{2k}\left(n-\dfrac{k(1+(-1)^k)}{4}\right)}{k}\cdot I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi\sqrt{24n-1}}{12k}\right).$$

2006 年に K. Bringmann と K. Ono がモジュラーフォームの理論を用いて, この Andrews-Dragonette の予想を証明したのである [3], [4].

4 脇本分母公式とモックテータ関数の関係式

Ramanujan の手紙や Lost Notebook に登場するモックテータ関数の関係式を証明することが, しばらくの間, 研究者たちの課題であった. そこでモックテータ関数の関係式の応用の 1 つとして, 脇本先生のアフィン・スーパー・リー環の分母公式から得られるものを, 幾つか紹介したい.

次の関係式は, $\widehat{A}(1,0)$ 型アフィン・スーパー・リー環の分母公式 [10], [11] から得られる.

$$(q)_\infty\,(4\chi(q)-f(q)) = \frac{3\,(q^3;q^3)_\infty^2}{(-q^3;q^3)_\infty^2}. \tag{5}$$

$$(q^2;q^2)_\infty\left(\rho(q)+\frac{1}{2}\,\omega(q)\right) = \frac{3\,(q^6;q^6)_\infty^2}{2\,(q^3;q^6)_\infty^2}. \tag{6}$$

式 (5) は Ramanujan の最後の手紙に登場する関係式で, 式 (6) は Watson によって得られた関係式である.

さて, 次の新しい関係式は, $\widehat{B}(1,1)$ 型アフィン・スーパー・リー環の分母公式から得られる [13].

定理 1. 位数 3 のモックテータ関数 $\rho(q)$ と $\omega(q)$ に対し, 次の関係式が成り立つ.

$$(q^2;q^2)_\infty\left((\rho(q)+\rho(-q))+\frac{1}{2}(\omega(q)+\omega(-q))\right)=\frac{3\,(q^{12};q^{12})_\infty j(-q^{12},q^{24})}{(q^6;q^{12})_\infty}. \tag{7}$$

定理 1 の関係式 (7) は, 式 (6) を用いることで次のように書き換えることができる:

$$j(-q^3,q^{12})^2+j(q^3,q^{12})^2=2\;j(-q^6,q^{24})\;j(-q^{12},q^{24}). \tag{8}$$

この関係式 (8) はテータ関数の関係式

$$\vartheta_{00}(v,\tau)^2+\vartheta_{01}(v,\tau)^2=2\;\vartheta_{00}(0,2\tau)\;\vartheta_{00}(2v,2\tau)$$

において, $\tau\to 6\tau$, $v\to\frac{3}{2}\tau$ と変換したものに等しい. このことによってモックテータ関数の関係式を, テータ関数の関係式で捉えることができた.

また脇本分母公式からは, 2000 年に Gordon と McIntosh によって発見された位数 8 のモックテータ関数 [8] の関係式も得られる. 位数 8 のモックテータ関数には次のものがある.

$$\begin{aligned}
U_0(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(-q^4;q^4)_n},\\
U_1(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)^2}(-q;q^2)_n}{(-q^2;q^4)_{n+1}},\\
V_1(q) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)^2}(-q;q^2)_n}{(q;q^2)_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n^2+2n+1}(-q^4;q^4)_n}{(q;q^2)_{2n+2}}.
\end{aligned}$$

これらのモックテータ関数には次の関係式

$$\begin{aligned}
U_0(q)+2U_1(q) &= (-q;q^2)_\infty^3(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^4)_\infty,\\
V_1(q)-V_1(-q) &= 2q(-q^2;q^2)_\infty(-q^4;q^4)_\infty^2(q^8;q^8)_\infty
\end{aligned}$$

が成り立ち, それぞれ分母公式の $\widehat{B}(1,1)$ 型, $\widehat{A}(1,0)$ 型を特殊化することで得られる [13]. モックテータ関数の関係式を, 分母公式を用いて別証明を与えたことから, $\widehat{A}(1,0)$ 型の分母公式と q-超幾何級数の公式 (1) が, $\widehat{B}(1,1)$ 型の分母公式と q-超幾何級数の公式 (2) が, 対応していることも分かった.

5 その他の関係式

今まで見てきたように, モックテータ関数の関係式は, 同じ位数のモックテータ関数の間で成り立っていた. ところが次の関係式は, 位数の異なる 2 つのモックテータ関数の関係式である [12].

定理 2. 位数 3 の $\chi(q)$ と位数 6 の $\gamma(q)$ の間に, 次の関係式が成り立つ.

$$(q)_\infty\,(3\chi(q)-\gamma(q))=6\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{3n(n+1)/2}}{1+q^{2n}+q^{4n}}. \tag{9}$$

ただし

$$\gamma(q):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(q)_n}{(q^3;q^3)_n}.$$

式 (9) において, 2 つのモックテータ関数を合わせたものが, 右辺のような美しい 1 つの無限級数で表せるのには, 必ず意味があると私は思う. 今まで紹介してきたモックテータ関数の関係式と同様, この右辺の無限級数も無限積で表せるのではないかと期待している.

参考文献

[1] G. E. Andrews and F. G. Garvan, *Ramanujan's "lost" notebook. VI: The mock theta conjectures,* Adv. Math. 73 (1989), 242–255.

[2] G. E. Andrews and D. Hickerson, *Ramanujan's "lost" notebook. VII: The sixth order mock theta functions,* Adv. Math. 89 (1991), 60–105.

[3] K. Bringmann and K. Ono, *The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks,* Inventiones Mathematicae, 165 (2006), 243–266.

[4] K. Bringmann and K. Ono, *Lifting cusp forms to Maass forms with an application to partitions,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 104 (2007), no. 10, 3725–3731.

[5] Y. -S. Choi, *Tenth order mock theta functions in Ramanujan's lost notebook,* Invent. Math. 136 (1999), 497–569.

[6] Y. -S. Choi, *Tenth order mock theta functions in Ramanujan's lost notebook II,* Adv. Math. 156 (2000), 180–285.

[7] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series, Second Edition,* Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[8] B. Gordon and R. J. McIntosh, *Some eighth order mock theta functions,* J. London Math. Soc.(2) 62 (2000), 321–335.

[9] M. Ito and Y. Sanada, *On the Sears-Slater basic hypergeometric transformations,* preprint, 2006.

[10] V. G. Kac and M. Wakimoto, *Integrable highest weight modules over affine superalgebras and number theory,* in "Lie Theory and Geometry ∼ in honor of Bertram Kostant" ed. by J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin and V. Kac, Progress in Mathematics Vol.123, Birkhäuser, 1994, 415–456.

[11] V. G. Kac and M. Wakimoto, *Integrable highest weight modules over affine superalgebras and Appell's function,* Commun. Math. Phys. 215 (2001), 631–682.

[12] Y. Sanada, *A new identity relating mock theta functions with distinct orders,* Tokyo J. Math. 29 (2006), no. 1, 199–207.

[13] Y. Sanada, *Some identities relating mock theta functions which are derived from denominator identity,* preprint, 2007.

[14] D. B. Sears, *On the transformation theory of basic hypergeometric functions,* Proc. London Math. Soc.(2) 53, (1951). 158–180.

[15] L. J. Slater, *General transformations of bilateral series,* Quart. J. Math., Oxford Ser.(2) **3**, (1952). 73–80.

[16] M. Wakimoto, *Representation theory of affine superalgebras at the critical level,* Documenta Mathematica, Extra Volume ICM 1998, Vol.II (1998), 605–614.

[17] M. Wakimoto, *A topic related to infinite-dimensional Lie superalgebras,* Cubo Mat. Educ.5 (2003), 167–196.

[18] G. N. Watson, *The final problem: An account of the mock theta functions,* J. London Math. Soc.11 (1936), 55–80.