2次体の2-類体塔の無限性について

末吉 豊 (長崎大学)

あらまし

虚 2 次体 K の 2-類体塔の無限性について考察する．Golod-Shafarevich の結果 (1964) より, K の類群 Cl_K の 2-階数が 5 以上なら, K の 2-類体塔は無限である．1996 年, Hajir は Cl_K の 4-階数が 3 以上なら, K の 2-類体塔は無限であることを示した．著者は Hajir と同じ手法で, Rédei 行列を用いて Cl_K の 4-階数を調べることにより, Cl_K の 2-階数が 4 で, K の判別式に負の素判別式が 1 つだけ含まれるときに, 1 つの例外の Rédei 行列を除き, K の 2-類体塔が無限であることを示した (2004)．本稿では, K の判別式に含まれる負の素判別式が 3 つの場合と 5 つの場合を考察する．これらの場合, 約 4 分の 3 の Rédei 行列に対し, K の 2-類体塔が無限となることを示すことができる．

1　類体塔問題

K を代数体とする．$K_0 = K$ とおき, K_{i+1} を K_i の Hilbert 類体とするとき,

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \cdots\cdots \subseteq K_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$$

を K の**類体塔**という．$[K_\infty : K] < \infty$ のとき, K の類体塔は**有限**, そうでないとき, **無限**という．素数 p に対し, $K_0^{(p)} = K$ とおき, $K_{i+1}^{(p)}$ を $K_i^{(p)}$ の Hilbert p-類体とするとき,

$$K = K_0^{(p)} \subseteq K_1^{(p)} \subseteq K_2^{(p)} \subseteq \cdots\cdots \subseteq K_i^{(p)} \subseteq K_{i+1}^{(p)} \subseteq \cdots\cdots \subseteq K_\infty^{(p)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i^{(p)}$$

を K の p-**類体塔**という．p-類体塔の有限性, 無限性も同様に定義する．

類体塔問題 (Furtwängler[3], 1916). K の類体塔はつねに有限か？

Cl_K を K のイデアル類群, E_K を K の単数群とする．$d_p Cl_K = \dim_{\boldsymbol{F}_p} Cl_K/Cl_K^p$ で Cl_K の p-階数を表し, $d_4 Cl_K = \dim_{\boldsymbol{F}_2} Cl_K^2/Cl_K^4$ で Cl_K の 4-階数を表す．

定理 1 (Golod-Shafarevich[6], Gaschütz-Vingberg[4, 34]). K を代数体とするとき,

$$d_p Cl_K \geq 2 + 2\sqrt{d_p E_K + 1} \Longrightarrow [K_\infty^{(p)} : K] = \infty.$$

d_K を K の判別式とし, t_K を d_K を割る素因子の個数とする．

例 1. K が虚 2 次体のとき, $p = 2$ とすると, $d_2 E_K = 1$ だから,

$$d_2 Cl_K \geq 2 + 2\sqrt{2} = 4.828\cdots \Longrightarrow [K_\infty^{(2)} : K] = \infty$$

である．つまり, $d_2 Cl_K \geq 5$ なら, K の 2-類体塔は無限である．$d_2 Cl_K = t_K - 1$ だから, K で 6 個以上の素数が分岐すればよい．

例 2. K が <u>実 2 次体</u>のとき, $p=2$ とすると, $d_2E_K=2$ だから,

$$d_2Cl_K \geq 2+2\sqrt{3}=5.464\cdots \Longrightarrow [K_\infty^{(2)}:K]=\infty$$

である. つまり, $d_2Cl_K \geq 6$ なら, K の 2-類体塔は無限である. 実 2 次体の場合,

$$d_2Cl_K = \begin{cases} t_K-1 & (d_K \text{ の素判別式がすべて正}) \\ t_K-2 & (\text{その他}) \end{cases}$$

だから, K で 8 個 (d_K の素判別式がすべて正なら 7 個) 以上の素数が分岐すればよい.

類群のランクと類体塔の無限性について, 以下のことが知られている.

1. $d_pCl_K=1$ (K の p-類群が cyclic) $\Longrightarrow K_1^{(p)}=K_2^{(p)}$.

2. (Koch-Venkov[12], 1975, Schoof[30], 1986) K : 2 次体, p : 奇素数のとき,

$$d_pCl_K \geq 3 \Longrightarrow [K_\infty^{(p)}:K]=\infty.$$

3. (Maire[16], 1997) K : 3 次巡回体, $p \geq 5$ のとき,

$$d_pCl_K \geq 4 \Longrightarrow [K_\infty^{(p)}:K]=\infty.$$

4. (Koch[11], 1969, Hajir[7, 8], 1996, 2000) K : 虚 2 次体のとき,

$$d_4Cl_K \geq 3 \Longrightarrow [K_\infty^{(2)}:K]=\infty.$$

5. (Benjamin[1, 2], 2001, 2002) K : 虚 2 次体, $d_2Cl_K=4,\ d_4Cl_K \geq 2$ のとき, 4 つの例外の Rédei 行列を除き, $[K_\infty^{(2)}:K]=\infty$.

6. (末吉 [31], 2004) K : 虚 2 次体, $d_2Cl_K=4$, d_K を割る負の素判別式がただ 1 つのとき, 1 つの例外の Rédei 行列を除き, $[K_\infty^{(2)}:K]=\infty$.

7. (Maire[17], 1998) K : 実 2 次体のとき,

$$d_4Cl_K \geq 4 \Longrightarrow [K_\infty^{(2)}:K]=\infty.$$

8. (Lemmermeyer[15], 1998?) K : 実 2 次体, Cl_K^+ : K の狭義イデアル類群とすると,

$$d_4Cl_K^+ \geq 4 \Longrightarrow [K_\infty^{(2)}:K]=\infty.$$

9. (Gerth III[5], 2005) K : 実 2 次体のとき,

$$K/\boldsymbol{Q} \text{ で 7 つの有理素数が分岐},\ d_4Cl_K=3 \Longrightarrow [K_\infty^{(2)}:K]=\infty.$$

10. (Mouhib[20], 2004) K : 実 2 次体, Cl_K^+ : K の狭義イデアル類群とすると,

$$d_2Cl_K=5,\ d_4Cl_K^+ \geq 3 \Longrightarrow [K_\infty^{(2)}:K]=\infty.$$

Martinet の問題 (予想) (Martinet[18, 19], 1978, 1980). K を虚 2 次体とするとき, $d_2 Cl_K \geq 4$ なら, K の 2-類体塔は無限か？

Martinet はこの問題を, root discriminant $rd_K = |d_K|^{1/[K:\boldsymbol{Q}]}$ の下極限

$$\alpha(0,1) = \liminf_{K:\ \text{総虚},\ [K:\boldsymbol{Q}]\to\infty} rd_K, \qquad \alpha(1,0) = \liminf_{K:\ \text{総実},\ [K:\boldsymbol{Q}]\to\infty} rd_K$$

の上からの評価に関連して提出している. 総虚な代数体 k の p-類体塔が無限ならば,

$$\alpha(0,1) \leq |d_k|^{1/[k:\boldsymbol{Q}]}$$

が成り立つ. もし, 予想が正しければ, $k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-3\cdot 5\cdot 7\cdot 13})$ の 2-類体塔が無限になるから,

$$\alpha(0,1) \leq rd_k = |d_k|^{1/2} = 73.891\cdots$$

が得られる. この評価に関して, Hajir-Maire[9, 10] は総虚 (または総実) 12 次体上の tame な分岐を許した無限 2-類体塔の存在を用いて,

$$\alpha(0,1) \leq 82.100\cdots, \qquad \alpha(1,0) \leq 954.293\cdots$$

を得ている. なお, root discriminant の下からの評価に関しては, Odlyzko の結果 [21, 22, 23, 24] が知られている.

問題. 一般に, 代数体 K と素数 p に対し, $d_p Cl_K \geq s \Longrightarrow [K_\infty^{(p)} : K] = \infty$ となる最小の s を求めよ.

注意. 実 (または虚) 2 次体で, $d_2 Cl_K = 2, 3$ かつ 2-類体塔が有限となる例, 無限となる例は多数知られている (Hajir, Lemmermeyer, Schmithals, Schoof [7, 13, 29, 30]). 一方, $d_2 Cl_K = 4$ または 5 となる実 2 次体で 2-類体塔が有限となる例や, $d_2 Cl_K = 4$ となる虚 2 次体で 2-類体塔が有限となる例は知られていない. 従って, 問題の s は, 実 2 次体で $4 \leq s \leq 6$, 虚 2 次体で $4 \leq s \leq 5$ である.

本稿では, K を虚 2 次体とし, $d_2 Cl_K = 4$ で, d_K を割る負の素判別式が 3 つまたは 5 つのとき, K の Rédei 行列を用いて, K の 2-類体塔の無限性を調べる.

なお, 類体塔問題全般については, Roquette の解説論文 [28] のほか, 最近の進展に関する山村氏の解説 [35, 36] や Lemmermeyer の survey[14] がある. また, 類群のランク評価と類体塔の無限性の関連については, 拙著 [32] も参照されたい.

2 Martinet の条件

Martinet は, $\alpha(0,1)$, $\alpha(1,0)$ の上からの評価に次の命題を利用した.

命題 1 (Martinet[18], 1978). F を代数体, p を素数とし, L/F を p 次巡回拡大とする. r, ρ をそれぞれ L/F で分岐する F の有限素点, 無限素点の個数とする. このとき,

$$r \geq d_p E_F + 3 - \rho + 2\sqrt{d_p E_L + 1}$$

ならば, L の p-類体塔は無限である.

命題 1 を用いて, 2 次体の 2-類体塔の無限性を調べることができる. 一般的な原理は次の通り. K を 2 次体, $F/\boldsymbol{Q}$ を 2-拡大とし, $K/\boldsymbol{Q}$ で分岐する素数が F で多くの素イデアルに分解するようにする. $L=FK$ とおいて, 2 次拡大 L/F に命題 1 を適用する. 命題 1 の条件が満たされれば, L の 2-類体塔は無限である. 更に, L/K が不分岐であれば, K の 2-類体塔も無限である. 例えば, F を K の genus 体の部分体にとればよい.

$$\begin{tikzcd}
& L_\infty^{(2)} \arrow[d, dash, "\text{無限次}"] \\
F \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\text{2-拡大}"'] & L=FK \arrow[d, dash, "\text{不分岐}"] \\
\boldsymbol{Q} \arrow[r, dash, "\text{2 次}"'] & K
\end{tikzcd}$$

F を総実 n 次体, L/F を総虚 2 次拡大とする. このとき, $d_2E_F=d_2E_L=\rho=n$ だから, 命題 1 より, $r\geq 3+2\sqrt{n+1}$ ならば, L の 2-類体塔は無限である.

F を総虚 n 次体, L/F を 2 次拡大とする. このとき, $d_2E_F=\frac{n}{2},\ d_2E_L=n,\ \rho=0$ だから, 命題 1 より, $r\geq\frac{n}{2}+3+2\sqrt{n+1}$ ならば, L の 2-類体塔は無限である.

命題 2. K を虚 2 次体とし, F を K の genus 体の部分体とする. $p_1,p_2,\cdots$ を d_K の素因数とする. 次の条件のいずれかが満たされれば, K の 2-類体塔は無限である.

(i) F が実 2 次体で, p_1,p_2,p_3 が F で分解し, p_4 が F で不分岐.

(ii) F が総実 4 次体で, p_1,p_2 が F で完全分解, または, p_1 が F で完全分解し, p_2,p_3 が F で不分岐かつ 2 つ以上の素イデアルに分解.

(iii) F が虚 2 次体で, p_1,p_2,p_3,p_4 が F で分解.

(iv) F が総虚 4 次体で, p_1,p_2 が F で完全分解し, p_3 が F で不分岐かつ 2 つの素イデアルに分解.

証明. (i) $n=2,\ r\geq 7\geq 3+2\sqrt{3}=6.464\cdots$ より, 命題 1 の条件を満たす.

(ii) $n=4,\ r\geq 8\geq 3+2\sqrt{5}=7.472\cdots$ より, 命題 1 の条件を満たす.

(iii) $n=2,\ r\geq 8\geq 4+2\sqrt{3}=7.464\cdots$ より, 命題 1 の条件を満たす.

(iv) $n=4,\ r\geq 10\geq 5+2\sqrt{5}=9.472\cdots$ より, 命題 1 の条件を満たす. □

3 4-階数と Rédei 行列

K を 2 次体とし, K の判別式 d_K を, $d_K=p_1^*p_2^*\cdots p_t^*$ $(t=t_K)$ と素判別式の積に分解する. 素判別式とは, 素因数をただ 1 つもつ判別式

$$p^*=\begin{cases}(-1)^{\frac{p-1}{2}}p & (p:\ \text{奇素数})\\ -4,\ 8,\ -8 & (p=2)\end{cases}$$

のことをいう．種の理論より，$d_2Cl_K^+ = t-1$．$\boldsymbol{F}_2$ 係数の t 次正方行列 $R_K = (a_{ij})$ を，Kronecker 記号を用いて

$$(-1)^{a_{ij}} = \begin{cases} \left(\dfrac{p_i^*}{p_j}\right) & (i \neq j), \\ \left(\dfrac{d/p_i^*}{p_i}\right) & (i = j) \end{cases}$$

で定め，K の Rédei 行列という．対角成分の定め方より，R_K の各列ベクトルの成分の和は 0 である．このとき，

$$a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow p_j \text{ が } \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^*}) \text{ で分解}$$

である．また，$p_i^* \neq -4$, $p_j^* \neq -4$ のとき，

$$a_{ij} = a_{ji} \Longleftrightarrow p_i^* > 0 \text{ または } p_j^* > 0$$

である．更に，Rédei-Reichardt の理論より，

$$d_4Cl_K^+ = t - 1 - \operatorname{rank} R_K$$

が成り立つ [25, 27]．また，d_K の素判別式のうち，u 個が正で，v 個が負とすると，

$$d_4Cl_K^+ \leq u + \left[\frac{v-1}{2}\right]$$

が成り立つ [26]．従って，本稿で扱う $d_2Cl_K = 4$ の虚 2 次体では，素判別式がすべて負の場合は $d_4Cl_K \leq 2$，負の素判別式が 3 つの場合は $d_4Cl_K \leq 3$ である．

例 3. Martinet の予想に出てきた体 $k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-3\cdot5\cdot7\cdot13})$ については，

$$R_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 7 & 5 & 13 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{r} \\ -4 \\ -3 \\ -7 \\ 5 \\ 13 \end{array}$$

であるから，$d_4Cl_k = 4 - \operatorname{rank} R_k = 0$ となる．この場合，命題 2 の条件を満たす F はないので，k の 2-類体塔の無限性を示すことはできない．

4　素判別式がすべて負の場合

K を虚 2 次体，$d_2Cl_K = 4$ とし，$d_K = p_1^* p_2^* p_3^* p_4^* p_5^*$ の素判別式はすべて負とする．

まず，Rédei 行列を分類する．d_K の素判別式に -4 が含まれなければ，任意の i, j $(i \neq j)$ に対し，$a_{ij} + a_{ji} = 1$ が成り立つから，R_K はトーナメント (有向グラフで，任意の 2 点がきっかり 1 本の弧で結ばれているもの) の隣接行列である (ただし，対角成分は各列の成分の和が 0 になるように定める)．これはいわゆる総当たりリーグ戦の勝敗表だから，p_i $(1 \leq i \leq 5)$ の並べ替えにより，次のように 12 通りに分類される．

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(a) (b) (c) (d)

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&1&0&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

(e) (f) (g) (h)

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(i) (j) (k) (l)

d_K の素判別式に -4 が含まれるときは, $p_1^* = -4$ とする. このとき, R_K の第 1 行, 第 1 列を除いた行列はトーナメントの隣接行列であるから, p_i $(2 \le i \le 5)$ の並べ替えにより, 次のように 4 種類に分類される. ただし, 第 1 列の成分は未定である.

$$\begin{pmatrix} *&1&1&1&1\\ *&1&1&1&1\\ *&0&0&1&1\\ *&0&0&1&1\\ *&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} *&1&1&1&1\\ *&1&1&1&1\\ *&0&1&1&0\\ *&0&0&1&1\\ *&0&1&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} *&1&1&1&1\\ *&0&1&0&1\\ *&0&0&1&1\\ *&1&0&0&1\\ *&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} *&1&1&1&1\\ *&0&1&1&0\\ *&0&0&1&1\\ *&0&0&1&1\\ *&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

(m) (n) (o) (p)

これらの Rédei 行列のいくつかに対しては, K の genus 体の部分体

$$F = \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^* p_j^*},\ \sqrt{p_i^* p_k^*}),\ \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^*}),\ \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^*},\ \sqrt{p_j^*}) \qquad (i,\ j,\ k \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\})$$

をとり, 命題 2 (ii), (iii), (iv) を適用することにより, K の 2-類体塔が無限であることを示すことができる. 結果を表に示す. primes の欄は, F で完全分解する素数を表す. また, 括弧付きの (p_i) は, F で不分岐かつ少なくとも 2 つの素イデアルに分解する素数を表す. (a) $\sim$ (j) および (m) の場合には, K の 2-類体塔の無限性がいえる. また, (n), (o), (p) の場合には, 付加条件の下で, K の 2-類体塔の無限性がいえる. (k), (l) の場合には, 命題 2 を適用できる F を見つけることができない.

case	(a)	(b)	(c)	(d)
$d_4 Cl_K$	2	1	1	1
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_3 p_4},\ \sqrt{p_3 p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5^*})$
primes	$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$	$p_1,\ p_2$	$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$	$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$

case	(e)	(f)	(g)	(h)
$d_4 Cl_K$	1	1	1	0
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_3^*},\ \sqrt{p_4^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2 p_3},\ \sqrt{p_2 p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4^*},\ \sqrt{p_5^*})$
primes	$p_1,\ p_2,\ (p_5)$	$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$	$p_1,\ p_5$	$p_1,\ p_2,\ (p_3)$

case	(i)	(j)	(k)	(l)
d_4Cl_K	0	1	0	0
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_2p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2^*},\ \sqrt{p_5^*})$	−	−
primes	p_1, p_5	$p_1, p_4, (p_3)$	−	−

case	(m)	(n)	
d_4Cl_K	1, 2	0, 1	
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1^*p_2^*},\ \sqrt{p_1^*p_3^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_3p_4},\ \sqrt{p_3p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$
primes	p_4, p_5	p_1, p_2	$p_1, p_2, (p_3)$
付加条件	−	$a_{31} = a_{41} = a_{51}$	$a_{31} = 1,\ a_{41} = a_{51} = 0$

case	(o)		(p)	
d_4Cl_K	0, 1		0, 1	
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_2p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_3^*},\ \sqrt{p_4^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4^*},\ \sqrt{p_5^*})$
primes	p_1, p_2, p_3, p_4	p_1, p_5	$p_1, p_2, (p_5)$	$p_1, p_3, (p_2)$
付加条件	$a_{51} = 0$	$a_{21} = a_{31} = a_{41},\ a_{51} = 1$	$a_{31} = a_{41} = 0$	$a_{31} = 1,\ a_{41} = a_{51} = 0$

(m), (n), (o), (p) の場合, d_4Cl_K はそれぞれ, 次のように定まる.

(m) $d_4Cl_K = 2$ となる必要十分条件は $a_{31} = a_{41},\ a_{51} = 0$ である. 従って, $d_4Cl_K = 2$ となる R_K は 4 通り, $d_4Cl_K = 1$ となる R_K は 12 通りである.

(n) $d_4Cl_K = 1$ となる必要十分条件は $a_{11} = a_{21}$ である. 従って, p_i $(3 \le i \le 5)$ の並べ替えにより, $d_4Cl_K = 1$ となる R_K は 4 通り, $d_4Cl_K = 0$ となる R_K も 4 通り.

(o) $d_4Cl_K = 1$ となる必要十分条件は $a_{51} = 0$ である. 従って, p_i $(2 \le i \le 4)$ の並べ替えにより, $d_4Cl_K = 1$ となる R_K は 4 通り, $d_4Cl_K = 0$ となる R_K も 4 通り.

(p) $d_4Cl_K = 1$ となる必要十分条件は $a_{31} = a_{41}$ である. 従って, $d_4Cl_K = 1$ となる R_K は 8 通り, $d_4Cl_K = 0$ となる R_K も 8 通り.

結果をまとめると, 次のようになる. ただし, 表中の数字は Rédei 行列の数で, 括弧内の数が, K の 2-類体塔の無限性を証明できたものの数である.

d_4Cl_K	(a) ∼ (l)	(m)	(n)	(o)	(p)	計
2	1 (1)	4 (4)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	5 (5)
1	7 (7)	12 (12)	4 (2)	4 (4)	8 (4)	35 (29)
0	4 (2)	0 (0)	4 (4)	4 (2)	8 (2)	20 (10)
計	12 (10)	16 (16)	8 (6)	8 (6)	16 (6)	60 (44)

従って, 次の結果が得られる.

定理 2. K を虚 2 次体とし, $d_2Cl_K = 4$ で, d_K の素判別式はすべて負とする. $d_K = p_1^*p_2^*p_3^*p_4^*p_5^*$ を素判別式の積への分解とし, -4 が d_K の素判別式に含まれるときは $p_1^* = -4$ とする. このとき, p_i の並べ替えにより, $p_1^* \neq -4$ の場合には 16 通り, $p_1^* = -4$ の場合には 48 通りの Rédei 行列があり, それぞれ 10 通り, 34 通りの R_K に対して, K の 2-類体塔は無限である.

5　負の素判別式が 3 つの場合

前節同様, K を虚 2 次体, $d_2Cl_K = 4$ とし, $d_K = p_1^* p_2^* p_3^* p_4^* p_5^*$ の素判別式のうち, 3 つ p_1^*, p_2^*, p_3^* が負とする. -4 が d_K の素判別式に含まれるときは $p_1^* = -4$ とする.

まず, Rédei 行列を分類する. 以下のように, $p_1^* \neq -4$ の場合 (A), (B) と $p_1^* = -4$ の場合 (C) に分けて考える.

$$\underset{\text{(A)}}{\begin{pmatrix} * & 1 & 1 & * & * \\ 0 & * & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{(B)}}{\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & * & * \\ 0 & * & 1 & * & * \\ 1 & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{(C)}}{\begin{pmatrix} * & 1 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & * & * \\ * & 0 & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}}$$

(A) の場合, 行列 $(a_{ij})_{1\le i\le 3, 4\le j\le 5}$ は p_4, p_5 の並べ替えにより, 次のように 36 通りに分類される.

$$\underset{(1)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(2)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(3)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(4)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(5)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(6)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(7)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(8)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(9)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(10)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(11)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(12)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(13)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(14)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(15)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(16)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(17)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(18)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(19)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(20)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(21)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(22)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(23)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(24)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(25)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(26)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(27)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(28)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(29)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(30)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(31)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(32)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(33)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(34)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(35)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(36)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(B) の場合, 行列 $(a_{ij})_{1\le i\le 3, 4\le j\le 5}$ は p_1, p_2, p_3 および p_4, p_5 の並べ替えにより, 次のように 14 通りに分類される.

$$\underset{(37)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(38)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(39)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(40)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(41)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(42)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{(43)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$(44)\qquad(45)\qquad(46)\qquad(47)\qquad(48)\qquad(49)\qquad(50)$$

(C) の場合, 行列 $(a_{ij})_{2\le i\le 3,\,4\le j\le 5}$ は p_4, p_5 の並べ替えにより, 次のように 10 通りに分類される.

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$
$$(51)\qquad(52)\qquad(53)\qquad(54)\qquad(55)$$
$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$(56)\qquad(57)\qquad(58)\qquad(59)\qquad(60)$$

これらの Rédei 行列のいくつかに対しては, K の genus 体の部分体

$$F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_k}),\ \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1^*p_2^*},\ \sqrt{p_1^*p_3^*}),\ \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5}),\ \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^*p_j^*},\ \sqrt{p_k})$$
$$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^*},\ \sqrt{p_j^*}),\ \boldsymbol{Q}(\sqrt{p_i^*},\ \sqrt{p_k})\quad (i,\,j\in\{1,\,2,\,3\},\ k\in\{4,\,5\})$$

をとり, 命題 2 (i), (ii), (iv) を適用することにより, K の 2-類体塔が無限であることを示すことができる.

Case (A$_1$): (1) ∼ (13), (18) ∼ (26) の場合, $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$ とおくと, p_1, p_2, p_3 のうち, 少なくとも 1 つが F で完全分解し, 他の 2 つが F で不分岐かつ少なくとも 2 つの素イデアルに分解する. (14), (36) の場合, $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1p_2},\ \sqrt{p_1p_3})$ とおくと, p_4, p_5 は F で完全分解する. 従って, いずれの場合も, 命題 2 (ii) より, K の 2-類体塔は無限である. これらの場合, d_4Cl_K は以下のようになる. 値が 2 通りある場合は, いずれも $a_{45}=0$ のとき, 大きい方の値をとる.

case	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
d_4Cl_K	2, 3	1, 2	1, 2	1, 2	1	1	1	1, 2	0, 1	1, 2	1	0, 1

case	(13)	(14)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(36)
d_4Cl_K	1	1, 2	1	0	1	1	0	1	2	1	2	1

(15), (17), (27), (29) の場合は, 命題 2 (iv) を適用することにより, K の 2-類体塔が無限であることを示すことができる. 結果を表に示す. 記法は前節と同様である.

case	(15)	(17)	(27)	(29)
d_4Cl_K	1	1	1	1
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_3^*},\ \sqrt{p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2^*},\ \sqrt{p_3^*})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_3^*},\ \sqrt{p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2^*},\ \sqrt{p_3^*})$
primes	$p_1,\ p_2,\ (p_4)$	$p_1,\ p_5,\ (p_4)$	$p_1,\ p_2,\ (p_5)$	$p_1,\ p_4,\ (p_5)$

Case (A$_2$): (16), (28), (33), (35) の場合は, 付加条件の下で, K の 2-類体塔の無限性がいえる. 結果を表に示す. ただし, d_4Cl_K の値が 2 通りある場合は, いずれも $a_{45}=0$ のとき, 大きい方の値をとる.

case	(16)	(28)	(33)	(35)
d_4Cl_K	0	0, 1	1	1
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1p_2},\ \sqrt{p_4})$
primes	p_1, p_3, p_4	p_1, p_5	p_1, p_5	p_3, p_5
付加条件	$a_{45}=0$	$a_{45}=0$	$a_{45}=0$	$a_{45}=0$

Case (A$_3$): (30) $\sim$ (32), (34) の場合, $d_4Cl_K=0$ で, 命題 2 を適用できる F を見つけることができない.

Case (B$_1$): (37) $\sim$ (41), (44) $\sim$ (46) の場合, $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$ とおくと, p_1, p_2, p_3 のうち, 少なくとも 1 つが F で完全分解し, 他の 2 つが F で不分岐かつ少なくとも 2 つの素イデアルに分解する. (24), (50) の場合, $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1p_2},\ \sqrt{p_1p_3})$ とおくと, p_4, p_5 は F で完全分解する. 従って, いずれの場合も, 命題 2 (ii) より, K の 2-類体塔は無限である. これらの場合, d_4Cl_K は以下のようになる. 値が 2 通りある場合は, (37), (38), (40), (42) では $a_{45}=0$ のとき, (41), (44), (45), (46) では $a_{45}=1$ のとき, 大きい方の値をとる.

case	(37)	(38)	(39)	(40)	(41)	(42)	(44)	(45)	(46)	(50)
d_4Cl_K	1, 2	0, 1	0	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	0, 1	1, 2	0

Case (B$_2$): (43), (47) の場合は, 付加条件の下で, K の 2-類体塔の無限性がいえる. 結果を表に示す. ただし, d_4Cl_K の値が 2 通りある場合は, いずれも $a_{45}=0$ のとき, 大きい方の値をとる.

case	(43)	(47)
d_4Cl_K	0, 1	0, 1
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4})$
primes	p_1, p_2, p_4	p_1, p_2, p_5
付加条件	$a_{45}=0$	$a_{45}=0$

Case (B$_3$): (48), (49) の場合, $d_4Cl_K=0$ または 1 で, 命題 2 を適用できる F を見つけることができない. この場合, d_4C_K の値は, $a_{45}=1$ のとき, 大きい方の値をとる.

Case (C): (51) $\sim$ (55) の場合, $F=\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$ とおくと, p_2, p_3 のうち, 少なくとも 1 つが F で完全分解し, 他の 1 つと $p_1=2$ が F で不分岐かつ少なくとも 2 つの素イデアルに分解する. 従って, 命題 2 (ii) より, K の 2-類体塔は無限である. これらの場合, d_4Cl_K は以下のようになる.

case	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)
d_4Cl_K	1, 2, 3	0, 1, 2	0, 1, 2	0, 1	0, 1

(51) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{31}=a_{41}=a_{51}=0$ のとき, 最大値をとり, $a_{45}=1,\ a_{11}\neq a_{21}$ または $a_{45}=1,\ a_{41}\neq a_{51}$ のとき, 最小値をとる. (52) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{31}=a_{51}=0$ のとき, 最大値をとり, $a_{45}=1,\ a_{31}=1$ のとき, 最小値をとる. (53) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{51}=0,\ a_{11}=a_{21}$ のとき, 最大値をとり, $a_{45}=1,\ a_{11}\neq a_{21}$ のとき, 最小値をとる. (54) では, d_4Cl_K は $a_{31}=0$ のとき, 大きい方の値をとる. (55) では, d_4Cl_K は $a_{11}=a_{21}$ のとき, 大きい方の値をとる.

残りの場合は, 付加条件の下で, K の 2-類体塔の無限性がいえる. 結果を表に示す.

case	(56)		(57)	
d_4Cl_K	$0,\ 1,\ 2$		$0,\ 1$	
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_5})$		$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_1^*p_2^*},\ \sqrt{p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$
primes	$p_1,\, p_2,\, p_3$	$p_2,\, p_3,\, p_4$	$p_3,\, p_5$	$p_1,\, (p_2,\, p_3)$
付加条件	$a_{51}=0$	$a_{54}=0$	$a_{45}=0$	$a_{41}=a_{51}=0$

case	(58), (59)	
d_4Cl_K	$0,\ 1$	
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$
primes	$p_1,\, p_4$	$p_1,\, (p_2,\, p_3)$
付加条件	$a_{51}=a_{54}=0,\ a_{21}=a_{31}$	$a_{41}=a_{51}=0$

case	(60)		
d_4Cl_K	$1,\ 2$		
F	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_4})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_2p_3},\ \sqrt{p_5})$	$\boldsymbol{Q}(\sqrt{p_4},\ \sqrt{p_5})$
primes	$p_1,\, p_5$	$p_1,\, p_4$	$p_1,\, (p_2,\, p_3)$
付加条件	$a_{41}=a_{45}=0,\ a_{21}=a_{31}$	$a_{51}=a_{54}=0,\ a_{21}=a_{31}$	$a_{41}=a_{51}=0$

(56) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{21}=a_{31}$ のとき, 最大値をとり, $a_{45}=1\ a_{21}\neq a_{31}$ のとき, 最小値をとる. (57) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{31}=a_{51}$ または $a_{45}=1,\ a_{21}=a_{51}$ のとき, 大きい方の値をとる. (58) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{11}=a_{41}$ または $a_{45}=1,\ a_{21}=a_{41}$ のとき, 大きい方の値をとる. (59) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{11}=a_{41}$ または $a_{45}=1,\ a_{21}=a_{51}$ のとき, 大きい方の値をとる. (60) では, d_4Cl_K は $a_{45}=0,\ a_{11}=a_{41}=a_{51}$ または $a_{45}=1,\ a_{21}=a_{41}=a_{51}$ のとき, 大きい方の値をとる.

結果をまとめると, 次のようになる. 括弧内の数が, K の 2-類体塔の無限性を証明できたものの数である.

d_4Cl_K	(A$_1$)	(A$_2$)	(A$_3$)	(B$_1$)	(B$_2$)	(B$_3$)	(51)	(52)	(53)
3	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (2)	0 (0)	0 (0)
2	11 (11)	0 (0)	0 (0)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	13 (13)	4 (4)	4 (4)
1	38 (38)	5 (3)	0 (0)	8 (8)	2 (2)	2 (0)	9 (9)	20 (20)	20 (20)
0	6 (6)	3 (1)	8 (0)	10 (10)	2 (0)	2 (0)	0 (0)	8 (8)	8 (8)
計	56 (56)	8 (4)	8 (0)	20 (20)	4 (2)	4 (0)	24 (24)	32 (32)	32 (32)

d_4Cl_K	(54)	(55)	(56)	(57)	(58)	(59)	(60)	計
3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (3)
2	0 (0)	0 (0)	8 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	8 (4)	50 (46)
1	12 (12)	12 (12)	16 (12)	16 (10)	16 (6)	16 (6)	16 (6)	208 (164)
0	12 (12)	12 (12)	8 (4)	16 (10)	16 (6)	16 (6)	0 (0)	127 (83)
計	24 (24)	24 (24)	32 (24)	32 (20)	32 (12)	32 (12)	24 (10)	388 (296)

従って, 次の結果が得られる.

定理 3. K を虚 2 次体とし, $d_2Cl_K=4$ で, d_K を割る負の素判別式はきっかり 3 つとする. $d_K=p_1^*p_2^*p_3^*p_4^*p_5^*$ を素判別式の積への分解とし, -4 が d_K の素判別式に含まれるときは $p_1^*=-4$ とする. このとき, p_i の並べ替えにより, $p_1^*\neq -4$ の場合には 100 通り, $p_1^*=-4$ の場合には 288 通りの Rédei 行列があり, それぞれ 82 通り, 214 通りの R_K に対して, K の 2-類体塔は無限である.

6 まとめ

$d_2Cl_K = 4$ の虚 2 次体 K を, d_4Cl_K の値, 負の素判別式の個数, 素判別式に -4 を含むか, により分類し, 命題 2 を用いて, K の 2-類体塔の無限性を証明できたものの数を表にすると, 以下のようになる. ただし, 1, 3, 5 は負の素判別式が 1 つ, 3 つ, 5 つで, -4 を含まない場合を表し, 1_{-4}, 3_{-4}, 5_{-4} は同様に, -4 を含む場合を表す. 括弧内の数が, K の 2-類体塔の無限性を証明できたものの数である.

d_4Cl_K	1	1_{-4}	3	3_{-4}	5	5_{-4}	計
4	1 (1)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (2)
3	2 (2)	8 (8)	1 (1)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	13 (13)
2	8 (8)	26 (26)	13 (13)	37 (33)	1 (1)	4 (4)	89 (85)
1	10 (10)	46 (46)	55 (51)	153 (113)	7 (7)	28 (22)	299 (249)
0	13 (12)	14 (14)	31 (17)	96 (66)	4 (2)	16 (8)	174 (119)
計	34 (33)	95 (95)	100 (82)	288 (214)	12 (10)	48 (34)	577 (468)

参考文献

[1] E. Benjamin, *On imaginary quadratic number fields with* 2*-class group of rank* 4 *and infinite* 2*-class field tower*, Pacific J. Math. 201 (2001), 257–266.

[2] E. Benjamin, *On a question of Martinet concerning the* 2*-class field tower of imaginary quadratic number fields*, Annales des sciences; Mathematiques du Québec 26 (2002), 1–13.

[3] Ph. Furtwängler, *Über das Verhalten der Ideale des Grundkörper im Klassenkörper*, Monatsh. Math. Phys. 27 (1916), 1–15.

[4] W. Gaschütz, *Algebraic Number Theory*, London, 1967, p.241.

[5] F. Gerth III, *Some real quadratic fields with infinite Hilbert* 2*-class field towers*, Japan. J. Math. 31 (2005), 175–181.

[6] E. S. Golod and I. R. Shafarevich, *On class field towers*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 28 (1964), 261–272; English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 48 (1965), 91–102.

[7] F. Hajir, *On a theorem of Koch*, Pacific J. Math. 176 (1996), 15–18.

[8] F. Hajir, *Correction to "On a theorem of Koch"*, Pacific J. Math. 196 (2000), 507–508.

[9] F. Hajir and C. Maire, *Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields*, Compositio Math. 128 (2001), 35–53.

[10] F. Hajir and C. Maire, *Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields II*, J. Symbolic Comput. 33 (2002), 415–423.

[11] H. Koch, *Zum Satz von Golod-Schafarewitsch*, Math. Nachr. 42 (1969), 321–333.

[12] H. Koch und B. B. Venkov, *Über den p-Klassenkörperturm eines imaginär quadratischen Zahlkörpers*, Astérisque 24/25 (1975), 57–67.

[13] F. Lemmermeyer, *On 2-class field towers of some imaginary quadratic number fields*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 67 (1997), 205–214.

[14] F. Lemmermeyer, *Class field towers*, manuscript (1997), http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/˜hb3.html.

[15] F. Lemmermeyer, *The 4-class group of real quadratic number fields*, unpublished (1998?), http://www.fen.bilkent.edu.tr/˜franz/publ/rank4.pdf.

[16] C. Maire, *Tours de Hilbet des extensions cubiques cycliques de $\boldsymbol{Q}$*, Manuscripta Math. 92 (1997), 303–323.

[17] C. Maire, *Un raffinement du théorème de Golod-Safarevic*, Nagoya Math. J. 150 (1998), 1–11.

[18] J. Martinet, *Tours de corps de classes et estimations de discriminants*, Invent. Math. 44 (1978), 65–73.

[19] J. Martinet, *Petits discriminants des corps de nombres*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 56 (1980), Cambridge Univ. Press, Cambridge, new York, 151–193.

[20] A. Mouhib, *Sur la tour des 2-corps de classes de Hilbert des corps quadratiques réels*, Annales des sciences; Mathematiques du Québec 28 (2004), 179–187.

[21] A. M. Odlyzko, *Some analytic estimates of class numbers and discriminants*, Invent. Math. 29 (1975), 275–286.

[22] A. M. Odlyzko, *Lower bounds for discriminants of number fields*, Acta Arith. 29 (1975), 275–297.

[23] A. M. Odlyzko, *Lower bounds for discriminants of number fields II*, Tohoku Math. J. 29 (1977), 209–216.

[24] A. M. Odlyzko, *Bounds for discriminants and related estimates for class numbers*, Sém. de Théorie des nombres, Bordeaux 2 (1990), 119–141.

[25] L. Rédei, *Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper*, J. Reine Angew. Math. 171 (1934), 55–60.

[26] L. Rédei, *Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper*. J. Reine Angew. Math. 171 (1934), 61–64.

[27] L. Rédei und H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. 170 (1933), 69–74.

[28] P. Roquette, *On class field towers*, in: Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels and A. Fröhlich (eds.), Academic Press, 1967, 231–249.

[29] B. Schmithals, *Konstruktion imaginäirquadratischer Körper mit unendlichem Klassenkörperturm*, Arch. Math. 34 (1980), 307–312.

[30] R. Schoof, *Infinite class field towers of quadratic fields*, J. Reine Angew. Math. 372 (1986), 209–220.

[31] Y. Sueyoshi, *Infinite* 2*-class field towers of some imaginary quadratic number fields*, Acta Arith. 113 (2004), 251–257.

[32] 末吉豊, 類群のランク評価と類体塔の無限性について, 第 4 回北陸数論研究集会報告集, 金沢大学, 2006, 21–43.

[33] B. B. Venkov and H. Koch, *The p-tower of class fields for an imaginary quadratic field*, Zap. Nauchn. Sem. leningrad. otd. Mat. inst. Stelov. 46 (1974), 5–13; English translation: J. Soviet Math. 9 (1978), 291–299.

[34] E. B. Vinberg, *On the dimension theorem of associative algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 29 (1965), 209–214 (russian).

[35] 山村健, 代数体の類体塔について-入門, 早稲田大学整数論研究集会 2001 報告集, 早稲田大学, 2001, 161–172.

[36] 山村健, 代数体の類体塔について-サーベイ, 第 4 回北陸数論研究集会報告集, 金沢大学, 2006, 1–20.