実2次体に関するAnkeny-Artin-Chowla予想と連分数展開

橋本 竜太 (詫間電波高専)

2次無理数と連分数展開の関連はよく知られているが, 実2次体の基本単数に関するAnkeny-Artin-chowla予想への連分数展開からのアプローチはまだ十分に研究されていないのではないだろうか, というのが本研究の動機です. そのようなアプローチがどの程度可能なのか, 筆者が現在わかっていることを報告させていただきます.

本稿の流れは次の通りです. 1節ではAnkeny-Artin-Chowla予想を紹介します. 2節では連分数展開と基本単数の関連を復習してみます. 3節では循環連分数の周期節に注目して, 整数の集合を構成します. その集合に話を絞ることでAAC予想の反例の候補がかなり絞られることを4節で報告します. そこまでの話でもまだ解明できないことが多いのですが, そのうちごく一部について数値実験を行ってみましたので, それを5節で紹介します.

1 AAC予想の紹介

Ankeny-Artin-Chowla 予想 p を正の素判別式, すなわち, 4を法として1と合同な素数とします. 実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の基本単数は $\frac{t+u\sqrt{p}}{2}$ ($t, u \in \mathbb{Z}_{>0}$) のような形で書くことができます. このとき, $p \nmid u$ であろうという予想がAnkeny, Artin, Chowlaにより提唱されました [AAC]. 本稿では以下, この予想をAAC予想と表記することにします. AAC予想は現在未解決です.

数値実験 $p < 2 \times 10^{11}$ についてAAC予想は正しいことがvan der Poorten, te Riele, Williams [vdPtRW] により検証されています.

基本単数は連分数展開を利用して計算できることが知られていますので, 実際に u を求めて p で割ればよい. それだけの話なのですが, 実際にはそう簡単にはいきません. その理由のひとつとして, u が p に比較して非常に大きくなる場合があるのです. 文献 [vdPtRW] にある例として, $p = 40\,094\,470\,441$ のとき, $u > 10^{330\,000}$ となることが紹介されています.

Ankeny-Artin-Chowla 合同式 AAC予想は次の命題に由来しています.

命題 1 (Ankeny-Artin-Chowla [AAC]). 正の素判別式 p を持つ実2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の類数を h, 基本単数を $\frac{t+u\sqrt{p}}{2}$ ($t, u \in \mathbb{Z}_{>0}$) とすると,

$$\frac{u}{t}h \equiv B_{(p-1)/2} \pmod{p}$$

が成り立つ. ただし, $B_{(p-1)/2}$ はBernoulli数.

この合同式と $h < p$ とを合わせると, $p \nmid u$ ならば h が求まることがわかります. また, $p \mid u$ と $p \mid B_{(p-1)/2}$ とが同値であるということもわかります.

$u \bmod p$ がランダムな値を採るならば, $p \le x$, $p \equiv 1 \pmod 4$, かつ $p \mid u$ なる素数 p の個数は

$$\sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv 1\ (4)}} \frac{1}{p} \sim \frac{1}{2} \log\log x$$

と期待されるという議論があります（たとえば Washington [W] の §5.6）. $x = 2 \times 10^{11}$ ならば $\frac{1}{2}\log\log x \fallingdotseq 1.63$ ですので, van der Poorten, te Riele, Williams の検証で反例が見つからないといっても, さほど不思議なことではないということになります. 余談ながら, $\frac{1}{2}\log\log x \fallingdotseq 2$ となる x の値はおよそ 5.15×10^{23} です. $x < 2 \times 10^{11}$ という範囲はまだまだ狭いというべきかもしれません.

2　連分数展開と基本単数

本節および次節に関しては, Perron [P] をおおいに参考にしています.

実数 α に対して,

$$c_0 = \lfloor \alpha \rfloor, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha - c_0}, \quad c_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - c_2}, \ldots$$

というような計算を続けていくことで, α を

$$\alpha = c_0 + \frac{1}{\alpha_1} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = \cdots$$

のように連分数の形に展開することができます. α が無理数ならばこの連分数展開は無限に続くわけですが, 本稿ではこれを簡単に

$$\alpha = [\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ ]$$

のように表記することにします.

2 次無理数と連分数展開のかかわりについてはとてもよく調べられていまして, とくに,「α が実 2 次無理数である」ことと「α の連分数展開は周期的である」こととが同値であることが知られています.「$c_0, c_1, \ldots, c_k$」が前周期,「$c_{k+1}, \ldots, c_{k+l}$」が周期節であるような連分数展開を本稿では次のように表すことにします：

$$\alpha = [\ c_0, c_1, \ldots, c_k, \overline{c_{k+1}, \ldots, c_{k+l}}\ ].$$

$\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開と基本単数（例）　具体例として, $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の形の 2 次無理数, ただし, p は正の素判別式（p は素数, $p \equiv 1 \pmod 4$）の場合を考えてみます.

たとえば, $p = 1064333$ の場合, 連分数展開は次のようになります：

$$\frac{1 + \sqrt{1064333}}{2} = [\,516, \overline{3, 147, 21, 21, 147, 3, 1031}\,].$$

実は, この連分数展開の形を使うことで, 判別式が p の実 2 次体の基本単数を求めることができるのです. 最初の 7 つ（周期節の長さに等しい数）の部分商を残した連分数は

$$[\,516, 3, 147, 21, 21, 147, 3\,] = \frac{44614536978}{86406589}.$$

これを用いて, $\mathbb{Q}(\sqrt{1064333})$ の基本単数 $\frac{t+u\sqrt{1064333}}{2}$ を次のように求めることができます :

$$u = 86406589, \quad t = 2 \times 44614536978 + 86406589.$$

一般の素判別式に対する基本単数も, 同様の方法で計算できます.

$\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開　p が 4 を法として 1 に合同な素数であるとき, $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開には次のような特徴があることが知られています :

- 前周期の長さは 1, 周期の長さは奇数 ;
- 周期節は " 回文的 ".

すなわち, $\dfrac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開は次のように表されるのです :

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{p}}{2} &= [\ c_0,\ \overline{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l}\ ] \\ &= [\ c_0,\ \overline{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{l'},\ c_{l'},\ \ldots,\ c_2,\ c_1,\ 2c_0-1}\ ], \\ c_l &= 2c_0 - 1,\ c_{l-k} = c_k\ (1 \leq k < l).\end{aligned}$$

ここで, l は周期節の長さ, $l' = \frac{l-1}{2}$ です.

逆に, 連分数展開がこのような形になる 2 次無理数は $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$, ただし p は 4 を法として 1 に合同な素数, のような形に書けるかというと, そうはいきません. 実際には, 次のことがわかっています.

命題 2. 実数 α について, その連分数展開が

$$\alpha = [\ c_0,\ \overline{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{l'},\ c_{l'},\ \ldots,\ c_2,\ c_1,\ 2c_0-1}\ ]$$

と表されるための必要十分条件は, $\alpha = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$ となる, 平方数ではない, 1 より大きな有理数 D が存在することである.

3　周期に注目した集合 $S(l;\ldots)$ の構成

具体的な例を挙げて, それらについて AAC 予想が成り立っているかどうかを確かめてみます.

周期の長さが 1 の場合　まずは, $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開の周期の長さが 1 の場合. 連分数展開は次のような形になっています :

$$\frac{1+\sqrt{p}}{2} = [\ c_0, \overline{2c_0-1}\ ].$$

小さい順に具体的に挙げていくと,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1,\overline{1}], \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2} = [2,\overline{3}], \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} = [3,\overline{5}], \quad \frac{1+\sqrt{53}}{2} = [4,\overline{7}], \ldots.$$

ここに挙げた p に関連して, $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ の連分数展開の周期の長さが 1 になるような整数 d の集合 $S(1)$ を考えてみます：

$$\begin{aligned}S(1) &:= \left\{d \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\ c_0, \overline{2c_0-1}\ ],\ c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor \right\} \\ &= \{5, 13, 29, 53, 85, \ldots\}.\end{aligned}$$

$S(1)$ は素数の集合というわけではないところに注意して下さい. 実は, $S(1)$ の元である素数について, 必ず $u = 1$ なのです. 当然, AAC 予想は成り立ちます.

周期の長さが 3 の場合　次に簡単な例は, 周期の長さが 3 の場合です. 連分数展開の形は

$$\frac{1+\sqrt{p}}{2} = [\ c_0, \overline{c_1, c_1, 2c_0-1}\ ].$$

$\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ の連分数展開の周期の長さが 3 である整数 d の集合 $S(3)$ を考えてみます：

$$S(3) := \left\{d \in \mathbb{Z} \,\middle|\, {}^{\exists}c_1 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ s.t. } \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\ c_0, \overline{c_1, c_1, 2c_0-1}\ ],\ c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor \right\}.$$

素数 p が $S(3)$ の元ならば, $u = c_1^2 + 1$ です. これが p で割り切れるかどうかを知りたいのですが, 集合 $S(3)$ をさらに分けて考えてみることにします. 具体的には, c_1 の値を固定した集合 $S(3; c_1)$ を考えるのです：

$$S(3; c_1) := \left\{d \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\ c_0, \overline{c_1, c_1, 2c_0-1}\ ],\ c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$S(3; c_1)$ の元である素数 p に対して, $u = c_1^2 + 1$ です. 実は, $\min S(3; c_1) = c_1^2 + 4 > u$ なのです. よって, $p \in S(3; c_1)$ ならば $u < p$. すなわち, $p \in S(3; c_1)$ ならば AAC 予想は正しいのです. AAC 予想のみならず, $u < p$ が成り立っているのです.

周期の長さが 5 の場合　次に, 周期の長さが 5 の場合です. 周期の長さが 3 のときと同様に, 周期節中の部分商 c_1, c_2 を固定します：

$$S(5; c_1, c_2) := \left\{d \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\ c_0, \overline{c_1, c_2, c_2, c_1, 2c_0-1}\ ],\ c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$c_1 = c_2$ ならば, $p \in S(5; c_1, c_2) \setminus \{\min S(5; c_1, c_2)\}$ に対して $u < p$ であること, および, $\min S(5; c_1, c_2) \in S(1)$ であることがわかります. すなわち, AAC 予想は成り立ちます.

$c_1 \neq c_2$ ならば, 初等的な計算で

$$u = (c_1 c_2 + 1)^2 + {c_1}^2 < \min S(5; c_1, c_2)$$

が成り立つことがわかります（橋本 [橋], 第 6 章）. とくに, $p \in S(5; c_1, c_2)$ ならば AAC 予想は正しいわけです.

以上の議論から, $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開の周期の長さが 5 以下ならば, AAC 予想が成り立つのみならず, $u < p$ であることがわかりました.

周期の長さが 7 の場合（例）　ここまでは $u > p$ となることはありませんでした. 周期の長さを 7 まで伸ばすと, $u > p$ となる例が現れます. 次の例を御覧下さい :

$$S(7;3,147,21) := \left\{ d \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\ c_0, \overline{3,147,21,21,147,3,2c_0-1}\ ],\ c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$p \in S(7;3,147,21)$ について, $u = 86406589$ です.

$S(7;3,147,21)$ の最小元は $p = 1064333$ でして, これについては $p < u$ となります. ところが, $p \in S(7;3,147,21)$ かつ $p \neq \min S(7;3,147,21) = 1064333$ ならば, $p > u$ が成り立っているのです.

全体としてみると, $S(7;3,147,21)$ の元については AAC 予想は正しいことがわかります.

集合 $S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ の構成　より一般に, “ 周期節を固定 ” して, 次の集合を考えます : l は奇数, $l' = \frac{l-1}{2}$ として,

$$\begin{aligned} S(l;c_1,\ldots,c_{l'}) := \Bigl\{ d \in \mathbb{Z} \;\Bigm|\; & \\ & \frac{1+\sqrt{d}}{2} = [\ c_0,\ \overline{c_1,\ \ldots,\ c_{l'},\ c_{l'},\ \ldots,\ c_1,\ 2c_0-1}\ ],\ c_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{d}}{2} \right\rfloor \Bigr\}. \end{aligned}$$

この集合に属している素数に対する u の値は一定であることはすぐに紹介します. それを踏まえれば, $u > p$ となる素数 p がこの集合の中にいくつあるかを考えてみるという方向性が見えて来ます. その結果どういうことになるかを紹介する前に, この集合の持っている性質を確認しておきます.

整数 $q_{l-1},\ q_{l-2},\ r_{l-2}$ を次で定義します :

$$\begin{pmatrix} q_{l-1} & q_{l-2} \\ * & r_{l-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_{l'} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{l'} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これらを用いると, 集合 S は次のように表すことができるのです :

$$\begin{aligned} S(l;c_1,\ldots,c_{l'}) = \Bigl\{ (q_{l-2}r_{l-2} + q_{l-1}s)^2 + 4(q_{l-2}s + {r_{l-2}}^2) \;\Bigm|\; & \\ & s \in \mathbb{Z},\ s > -\frac{q_{l-2}r_{l-2}}{q_{l-1}},\ q_{l-1}\ \text{が奇数ならば}\ s\ \text{は奇数} \Bigr\}. \end{aligned}$$

大雑把に言って, S は 2 次式の特殊値の集合なのです. もちろん, S の元はすべて素数であるというわけにはいきません.

具体例を挙げておきましょう. $\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [c, \overline{2c-1}]$ となる正整数 d の集合は

$$S(1;) = \left\{ s^2 + 4 \;\middle|\; s \in \mathbb{Z},\ s \geq 1,\ s\ \text{は奇数} \right\}.$$

$\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [c, \overline{1,1,2c-1}]$ となるものは

$$S(3;1) = \left\{ 4s^2 + 8s + 5 \;\middle|\; s \in \mathbb{Z},\ s \geq 0 \right\}.$$

$\frac{1+\sqrt{d}}{2} = [c, \overline{2,2,2c-1}]$ であれば

$$S(3;2) = \left\{ 25s^2 + 28s + 8 \;\middle|\; s \in \mathbb{Z},\ s \geq 0,\ s\ \text{は奇数} \right\}.$$

また, 1064333 を含む集合として先ほど紹介した $S(7;3,147,21)$ は,

$$S(7;3,147,21)=\Big\{(q_5r_5+q_6s)^2+4(q_5s+{r_5}^2)\ \Big|\ s\in\mathbb{Z},\ s>-\frac{q_5r_5}{q_6}=-3178579.00001\ldots,\ s\text{ は奇数}\Big\},$$

ただし, $q_6=86406589$, $q_5=28737054$, $r_5=9557353$.

AAC 予想に興味のある立場からすると, $S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ は素数をどの程度含んでいるかが気になるところですが, Hardy-Littlewood 予想（たとえば, [R], Chap 6, Section IV）によれば, 無限個含むことが期待されています. ただし, $S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ が平方因子を含まない整数を無限個含むことであれば Friesen[F] の手法を用いて証明できます.

また, $p\in S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ ならば $u=q_{l-1}$. つまり, $S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ の世界に限定するならば, u の値は p によらず一定なのです.

4　AAC 予想の反例の候補

集合 $S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ と AAC 予想　ここまでの話を踏まえたうえで, $S(l;c_1,\ldots,c_{l'})$ の中に AAC 予想の反例の可能性があるもの, より具体的には, $u>p$ を満たすものがいくつあるかを考えてみます. 結論として, 次のことがわかります.

定理 1 (Hashimoto[H1]). $u>p$ を満たす p があるならば, それは S の最小元に限る.

最小元でなければ, $u<p$ なのです. すなわち, S の中で AAC 予想の反例の候補となるのは最小元のみです. 周期節を固定すれば, 反例の候補はたかだか 1 個しかないのです. ただ, 最小元については $u>p$ が成り立つかどうかは, 一般的には何ともいえません.

系として, 次のようなことがわかります.

系 1. p は素数, l は $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ の連分数展開の周期節の長さを表しているものとする.

- $l\le 5$ ならば $u<p$.
- $\min S$ が素数でないような S について, $p\in S$ ならば $u<p$.
- q_{l-1} が奇数で, $\lceil\frac{q_{l-2}r_{l-2}}{q_{l-1}}\rceil$ が偶数であるような S について, $p\in S$ ならば $u<p$.
- $\frac{1+\sqrt{p}}{2}=[c_0,c,c,\ldots,c,2c_0-1]$ ならば $u<p$.

AAC 予想の反例の候補があり得る条件　それでは, S の中に反例があり得る, すなわち, $\min S<u$ が成り立つのはどのような場合なのか. 必要十分条件を書き下すことはできるのか. 実はそれが可能であるということ, それも, 単に 2 次不等式を解けばよいということに, 最近ようやく気がつきました. 結論は次の通りです.

定理 2. $\min S<u$ が成り立つ必要十分条件は, 次の不等式が成り立つことである：

$$0<q_{l-2}r_{l-2}-q_{l-1}\Big\lfloor\frac{q_{l-2}r_{l-2}}{q_{l-1}}\Big\rfloor<\frac{\sqrt{{q_{l-1}}^3-4}-2q_{l-2}}{q_{l-1}}.$$

大雑把には, $q_{l-2}r_{l-2}$ を q_{l-1} で割ったときの余りが十分小さいことが必要十分条件であるといえます.

しかし, この不等式を役立てる術は今のところ見出せていません. つまり, u を $p=\min S$ で割った余りを調べることにこの不等式をどう利用できるのかが今のところわからないのです. あるいは, この不等式を利用して $\min S<u$ となる S を具体的に構成してみせるということも容易ではなさそうです.

必要十分条件でなくても, うまく活用できるような条件はないだろうか. そこで, 周期節を構成する部分商の1つに注目して, 他の部分商との関係を調べてみるのは一案ではないだろうか. そのような観点で考えていく中で, 次のことがわかりました.

定理 3 (Hashimoto[H2]). c_1 が十分大きい S の中には AAC 予想の反例は存在しない. より具体的には, $c_1>q''+\sqrt{r''}$ ならば $\min S(l;c_1,c_2,\ldots,c_{l'})>u$ が成り立つ. ただし, q'', r'' は次の等式で得られるもの：

$$\begin{pmatrix} * & q'' \\ * & r'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_{l'} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{l'} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5　数値実験：周期の長さが 7 の場合

一般論としてのこれ以上の進展は今のところありません. そこで, 議論の進展を求めるべく, 数値実験をやってみることにしました. $u>p$ という現象が現れるもっとも簡単な場合として, 周期の長さが 7 のものを探査してみました.

$\min S(7;c_1,c_2,c_3)<u$ が成り立つ正整数の組 (c_1,c_2,c_3) のうち, $\min S(7;c_1,c_2,c_3)<8\times 10^8$ を満たすものは447通り. なお, ここでは大小比較に興味がありますので, $\min S(7;c_1,c_2,c_3)$ が素数かどうかは問うていないことを注意しておきます.

この 447 通りを調べてみると, 興味深い現象が見出されました. といいますのも, 次のように分類することができるのです.

- $(\,({c_3}^2+1)c_2+2c_3,c_2,c_3\,)$ 型—252 通り
- $(\,c_1,c_2,(c_1c_2+1)(c_1-c_2)+c_1\,)$ 型—109 通り
- $(\,c_1,c_1c^2,c_1c\,)$ 型—54 通り
- その他—32 通り

第 1 の場合は, $q''=(c_3^2+1)c_2+c_3$, $r''={c_3}^2+1$ であることから, 定理 3 の c_1 の下からの評価式をそれ以上改善できないことを示す例になっています.

第 3 の場合について, (c_1,c_2,c_3) の値を具体的に挙げてみると, 次のような具合です：

$$\begin{aligned}&(1,c^2,c),(2,18,6),(3,48,12),(2,98,14),(3,147,21),\\&(2,242,22),(4,100,20),(5,180,30),\ldots.\end{aligned}$$

c_1 と c はどんな値でもよいというわけではなさそうです. 実際, 次のことが証明できました.

定理 4. $\min S(7;c_1,c_1c^2,c_1c)<u$ となるのは, 次の 2 通りのいずれかの場合に限る.

- c_1 が奇数かつ $c\equiv 1 \pmod{c_1}$

- c_1 が偶数かつ $c \equiv c_1 + 1 \pmod{2c_1}$

なお, この場合に AAC 予想が成り立つかどうかは, まだ確かめていません. おそらく地味な計算で証明できるとは考えているのですが.

参考文献

[AAC] Ankeny, N. C., Artin, E., and Chowla, S. "The Class-Number of Real Quadratic Fields," Annals of Math, vol. 56, no. 3 (1952), 479–493.

[F] Friesen, Christian. "On Continued Fractions of Given Period," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 103, no. 1 (1988), 9–14.

[橋] 橋本竜太. 連分数展開と 2 次無理数, 名古屋大学大学院人間情報学研究科 博士論文 (2001).

[H1] Hashimoto, Ryūta. "Ankeny-Artin-Chowla Conjecture and Continued Fraction Expansion," J. Number Th., vol. 90 (2001), 143–153.

[H2] Hashimoto, Ryūta. "Ankeny-Artin-Chowla conjecture and continued fraction expansion," *Proc. of the 2003 Nagoya Conference "Yokoi-Chowla conjecture and Related Problems"* (2004), 25–29.

[P] Perron, Oskar. *Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band I: Elementare Kettenbrüche, dritte, verbesserte und erweiterte auflage edition*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft m. b. H., Stuttgart (1954).

[R] Ribenboim, Paulo. *The New Book of Prime Number Records, 3rd ed.*, Springer-Verlag, New York (1996).

[vdPtRW] van der Poorten, A. J., te Riele, J. J., and Williams, H. C. "Computer Verification of the Ankeny-Artin-Chowla Conjecture for All Primes Less Than 100 000 000 000," Math. Comp. vol. 70 (2001), 1311–1328; Corrigenda and Addition, Math. Comp. vol. 72 (2003), 521–523.

[W] Washington, Lawrence C. *Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd ed.* GTM 83, Springer-Verlag, New York (1996).