CM 体上の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と高次 K 群について

青木 美穂 (岡山理科大学)

1 記号と準備

p : 素数.
F : 総実代数体.
K : CM 体, K/F はアーベル拡大.
$G = \mathrm{Gal}(K/F)$.
S : K/F で分岐する素点と無限素点を含む F の素点の有限集合.

任意の整数 $n \geq 1$ に対し, ζ_n で 1 の原始 n 乗根, μ_n で 1 の n 乗根がなす群を表す. また, $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_m \mu_{p^m}$, $\mathbb{Z}_p(n) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n}$ とおき, 任意の $\mathbb{Z}_p$ 加群 M に対し, $M(n) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$ とおく.

Definition 1.1 (The partial zeta function)**.** $\sigma \in G$ に対し,

$$\zeta_{F,S}(\sigma, s) = \sum_{\substack{(\mathfrak{a}, K/F) = \sigma \\ \mathfrak{a} \text{ は } S \text{ の素点と素な } F \text{ の整イデアル}}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

とおく. ここで, $(\mathfrak{a}, K/F) \in G$ は Artin 記号を表す. $\zeta_{F,S}$ は全複素平面に解析接続される.

Theorem 1.2 (Klingen, Siegel [19])**.** 全ての整数 $n \geq 0$ に対し, $\zeta_{F,S}(\sigma, -n) \in \mathbb{Q}$.

Definition 1.3 (Higher Stickelberger element)**.** 整数 $n \geq 0$ に対し,

$$\theta_S(n) = \sum_{\sigma \in G} \zeta_{F,S}(\sigma, -n)\sigma^{-1} \in \mathbb{Q}[G]$$

と定める.

Remark 1.4. $\theta_S(0)$ は通常の Stickelberger element である.

Theorem 1.5 (Cassou-Nogués [4], Deligne-Ribet [9])**.** K に含まれる 1 の巾根がなす群を $\mu(K)$ とおく.

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_S(0) \subseteq \mathbb{Z}[G].$$

Remark 1.6. 上の定理は, $F = \mathbb{Q}$ の時は Kubota-Leopoldt [13], F が実二次体の場合は Coates-Sinnott [8] の結果である.

整数 $n \geq 1$ に対し,

$$w_n(K) = \max\{m \mid \mathrm{Gal}(K(\mu_m)/K) \text{ の exponent は } n \text{ を割る }\}$$

とおく. つまり $w_n(K)$ は, $\mathrm{Gal}(K(\mu_m)/K)^n = \{1\}$ となる最大の整数 m である. 定義より明らかに, $w_1(K) = |\mu(K)|$, $w_1(K) \leq w_n(K)$ である.

Lemma 1.7 (例えば [20, Prop7.2.5])**.** $n \geq 1$ を整数, $\mu_\infty = \cup_{n\geq 1}\mu_n$ とおく.

$$\begin{aligned}&\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}((\mu(K(\mu_\infty))^{\otimes n})^{\mathrm{Gal}(K(\mu_\infty)/K)})\\ &\qquad = \langle N\mathfrak{a}^n - (\mathfrak{a}, K/F) \mid \mathfrak{a}\text{ は } S \text{ と } w_n(K) \text{ を割る素点と素な整イデアル}\rangle_{\mathbb{Z}[G]}.\end{aligned}$$

特に $n = 1$ とすると, ($w_1(K)$ を割る素点は, K/F で分岐することに注意)

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K)) = \langle N\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}, K/F) \mid \mathfrak{a}\text{ は } S \text{ の素点と素な整イデアル}\rangle_{\mathbb{Z}[G]}$$

となる.

Conjecture 1.8 (Brumer)**.** K のイデアル類群を Cl_K とおく.

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mu(K))\theta_S(0) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_K).$$

Remark 1.9. $F = \mathbb{Q}$ の時は Stickelberger の定理 [6], [22, §6.2] として良く知られている.

F が一般の総実代数体の時は, 以下の事が知られている. Wiles の論文では仮定 $p \nmid [K:F]$ 無しに主張されているが, 証明が $p|[K:F]$ の場合は扱われていないので, 後で用いる時は予想として扱う.

Theorem 1.10 (Wiles [23])**.** p を奇素数, $p \nmid [K:F]$ とする. G の位数が p と素な odd 指標 χ に対し, F の素点の集合 $S_{\chi,p}$ を次のようにおく.

$$S_{\chi,p} = \begin{cases} \{\mathfrak{p}|p \mid \chi(\mathfrak{p}) = 1\}, & \chi \text{ が } \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{cl}}(\mu_p)/F) \text{ の指標でもあり, 位数が 3 以上のとき,} \\ 0, & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

ここで, F^{cl} は F の Galois 閉包を表す. さらに,

$$S_{K,p} = \bigcup_{\substack{\chi:odd \\ \text{位数は } p \text{ と素}}} S_{\chi,p}$$

とおく. このとき $S_{K,p} \subseteq S$ ならば, Brumer 予想の p-part は成り立つ. すなわち,

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mu(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)\theta_S(0) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mathrm{Cl}_K\{p\}).$$

2 Coates-Sinnott の予想

$\mathcal{O}_K$ で代数体 K の整数環を表す. $K_0(\mathcal{O}_K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}_K$, $K_1(K) \simeq K^\times$ より, Brumer 予想は $0, 1$ 次の K 群の予想とも思える. これと類似させて高次の K 群に対し, 次のことが予想されている.

Conjecture 2.1 ([5, Conjecture 3], [20, §7.2])**.** 任意の整数 $n \geq 1$ に対し,

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}} K_{2n+1}(K))\theta_S(n) \subseteq \mathbb{Z}[G]$$

かつ

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}} K_{2n+1}(K))\theta_S(n) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathbb{Z}[G]}(K_{2n}(\mathcal{O}_K))$$

が成り立つ.

Conjecture 2.1 は, 次の主張が全ての素数 p に対し成り立つ事と同値である.

Conjecture 2.2. p を素数とする. 任意の整数 $n \geq 1$ に対し,

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(K_{2n+1}(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p))\theta_S(n) \subseteq \mathbb{Z}_p[G]$$

かつ

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(K_{2n+1}(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p))\theta_S(n) \subseteq \mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(K_{2n}(\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$$

が成り立つ.

次に述べる Quillen-Lichtenbaum 予想は, Soulé により定義された K 群とエタールコホモロジー群の間の写像の同型を主張する. 以後, 度々この予想を仮定する.

Conjecture 2.3 (Quillen-Lichtenbaum)**.** 任意の代数体 L と, 奇素数 p, 整数 $n \geq 1$ に対し, p-adic Chern maps

(1) $K_{2n+1}(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p \to H^1_{ét}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]),\mathbb{Z}_p(n+1))$

(2) $K_{2n}(\mathcal{O}_L)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p \to H^2_{ét}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]),\mathbb{Z}_p(n+1))$

は同型.

Remark 2.4. Soulé [21] ($1 \leq n \leq p-1$) と Dwyer-Friedlander [10] (任意の $n \geq 1$) によって, 上の写像は全射かつ Kernel が有限であることが示されている.

$w_n(K)$ を $w_n(K) = \prod_p w_n^{(p)}(K)$ と各素数 p ごとに分解する.

Lemma 2.5. 任意の奇素数 p, 整数 $n \geq 1$ に対し,

$$\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{ét}(Spec(\mathcal{O}_K[1/p]),\mathbb{Z}_p(n)) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)^{\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)} \simeq \mu_{w_n^{(p)}(K)}^{\otimes n}.$$

Proof. 同型:

$$\begin{aligned}\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{ét}(Spec(\mathcal{O}_K[1/p]),\mathbb{Z}_p(n)) &\simeq H^0_{ét}(Spec(\mathcal{O}_K[1/p]),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n))\\ &\simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)^{\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)}\end{aligned}$$

(例えば, [12, Lemma 2.2]) と, $w_n^{(p)}(K)$ の定義から得られる. (定義より, $w_n^{(p)}(K) = \max\{p^\nu \mid \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\nu})/K)$ の exponent は n を割る $\}$. 任意の $\zeta_{p^\nu}^{\otimes n} \in \mu_{p^\infty}^{\otimes n} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n)$ (群として μ_{p^∞} に同型, Galois 群 σ は σ^n で作用) に対し, $\zeta_{p^\nu}^{\otimes n}$ が $\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\nu})/K)$ 不変 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\nu})/K)$ の exponent は n を割る.) □

Lemma 2.6. Conjecure 2.3 の仮定の下, 任意の奇素数 p, 整数 $n \geq 1$ に対し,

$$\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(K_{2n+1}(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(n+1)^{\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)} \simeq \mu_{w_{n+1}^{(p)}(K)}^{\otimes n+1}.$$

Proof. Quillen の完全列:

$$\cdots \to K_{2n+1}(\mathcal{O}_K) \to K_{2n+1}(K) \to \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p}\neq 0\\ prime}} K_{2n}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \to K_{2n}(\mathcal{O}_K) \to \cdots$$

に対し, $K_{2n}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) = 0$ かつ Soulé の結果 [21] より $K_{2n+1}(\mathcal{O}_K) \to K_{2n+1}(K)$ は単射なので, 同型 $K_{2n+1}(\mathcal{O}_K) \simeq K_{2n+1}(K)$ を得る. 主張はこれと Conjecture 2.3, 前 Lemma より得られる. □

Conjecture 2.2 前半の主張については, Conjecture 2.3 を仮定すると, Lemma 1.7, 2.6 から,

$$\begin{aligned}&\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(K_{2n+1}(K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p))\\ &\qquad = \langle N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K/F) \mid \mathfrak{a}\text{ は }S\text{ と }w_n^{(p)}(K)\text{ を割る素点と素な整イデアル}\rangle_{\mathbb{Z}_p[G]}\end{aligned}$$

となることと, Deligne-Ribet [9] の結果を用いた Coates ([5,Theorem 2, 及び §4]) の指摘により次のことが分かる.

Proposition 2.7 (Coates)**.** Conjecture 2.3 を仮定する. S が p を割る素点を含むならば, Conjecture 2.2 前半の主張は正しい.

後半については, 次の結果を得た.

Theorem 2.8. Conjecture 1.8, 2.3 を仮定する. p を奇素数とし $K(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}$ で p は不分解と仮定する. S が p を割る素点を含むならば, Conjecture 2.2 後半の主張は正しい.

Remark 2.9. Conjecture 2.2 に関連した結果について紹介する.
(1) $F=\mathbb{Q}$, アーベル拡大 $K/\mathbb{Q}$ の時の結果について:
奇素数 p, 無限素点のみの集合 S_∞, および (ある小さい仮定を満たす) 整数 b に対し, $w_{n+1}(\mathbb{Q})(b^{n+1}-(b,K/\mathbb{Q}))\theta_{S_\infty}(n)$ が $K_{2n}(\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$ の annihilator になることが $n=1$ の時 Coates-Sinnott [7] により, 一般の n に対しては Conjecture 2.3 の仮定の下, Nguyen Quang Do [15, §2-2] によって示されている.
(2) K,F が共に総実代数体で, K/F がアーベル拡大の時の結果について:
Nguyen Quang Do [16, §4.4] は, Conjecture 2.3 と岩澤 μ-不変量に関する仮定の下, 奇素数 p, 偶数 n に対し, Conjecture 2.2 を示している.
Snaith [20, Theorem 7.3.2] は, 奇素数 p, K の S-整数環 $\mathcal{O}_{K,S}$ に対し, 2 つのイデアル

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_{K,S}[1/p]),\mathbb{Z}_p(n+1))\theta_S(n)$$

と

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}_p[G]}(H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_{K,S}[1/p]),\mathbb{Z}_p(n+1))$$

の radical が一致することを, $K\cap F_\infty=F$ (F_∞ は F の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大) の仮定の下で示している.
また栗原 [14, §12] は K がある条件を満たす時, 岩澤 μ-不変量に関する仮定の下, 任意の奇素数 p に対し,

$$F_{\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/F)]]}(H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_{K_\infty}[1/p]),\mathbb{Z}_p(n+1))$$

を Stickelberger 元から作られる元を用いて完全に記述した. 特にこの結果から, $F=\mathbb{Q}$, アーベル拡大 $K/\mathbb{Q}$ のとき, Conjecture 2.3 の仮定の下, 無限素点のみの集合 S_∞, K の導手と素な整数 b に対し,

$$w_{n+1}(\mathbb{Q})(b^{n+1}-(b,K/\mathbb{Q}))\theta_{S_\infty}(n)\in F_{\mathbb{Z}_p[G]}(K_{2n}(\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p).$$

が導かれる. ここで, 環 R と R-加群 M に対し, $F_R(M)$ は Fitting ideal を表す. 一般に $F_R(M)\subseteq \mathrm{ann}_R(M)$ が成り立つ.
(3) 総実代数体 F, CM 体 K, K/F がアーベル拡大の時の結果について:
Burns-Greither [3, §5 Corollary 2 及びその後の Remark i)], [11, Theorem 3.2.3] は, Conjecture 2.3, 岩澤 μ-不変量, $K\cap F_\infty=F$ の仮定の下, 奇素数 p に対し, Conjecture 2.2 を示している.

Banaszak [1] は, Conjecture 2.3 の仮定の下, $n[K:F]$ を割らない奇素数 p と奇数 n に対し, localization map: $H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_K[1/p]), \mathbb{Z}_p(n+1)) \to \oplus_{v|p} H^2(K_v, \mathbb{Z}_p(n+1))$ が zero map であるとき Conjecture 2.2 を示している.

Thorem 2.8 を示すために用いる補題と命題を準備する.

Lemma 2.10. p を奇素数とし, $K(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}$ で p は不分解と仮定する. 整数 $n \geq 1$ に対し, $H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_K[1/p]), \mathbb{Z}_p(n+1)) \simeq X'(n)_{\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)}$ が成り立つ. ここで, $X' = \varprojlim A'_m$, A'_m は $K(\mu_{p^{m+1}})$ の p-ideal class group の p-part.

Proof. $K_\infty = K(\mu_{\mu_\infty})$ とおく. K, K_∞ の p の上の素点をそれぞれ v, w とおく. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \varphi : H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_K[1/p]), \mathbb{Z}_p(n+1)) & \to & H^2(K_v, \mathbb{Z}_p(n+1)) \\ \mathrm{cor} \uparrow & & \uparrow \mathrm{cor} \\ \varphi_\infty : H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_{K_\infty}[1/p]), \mathbb{Z}_p(n+1)) & \to & H^2(K_{\infty,w}, \mathbb{Z}_p(n+1)) \end{array}$$

ここで横の写像は localization map, 縦の写像は corestriction map である. Schneider [17, §6], [12, 3.1] により Ker $\varphi \simeq X'(n)_{\mathrm{Gal}(K_\infty/K)}$ が示されている. よって Im $\varphi = 0$ を示せばよい. そのためには, 以下の 2 つを示せば良い.

(1) 左側縦の corestriction map は全射.

(2) Im $\varphi_\infty = 0$.

(1) について: Ω_∞/K を p の外不分岐最大 pro-p 拡大とすると, 左側縦の写像は corestrictionmap:

$$\mathrm{cor} : H^2_{\acute{e}t}(\Omega_\infty/K_\infty, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(n+1)) \to H^2_{\acute{e}t}(\Omega_\infty/K, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}(n+1)) \tag{2.1}$$

を m に関して射影極限をとったものである. $\mathrm{Gal}(\Omega_\infty/K)$ の p-cohomological dimension は 2 なので ([17, §1 Satz 5], [18, Chap I Proposition 14 の Corollary 2, Propsition 22]), 上の写像 (2.1) は全射 ([18, Chap I Lemma 4]).

(2) について: Hasse の相互法則より restriction map:

$$H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_{K_\infty}[1/p]), \mathbb{Z}_p(1)) \to H^2(K_{\infty,w}, \mathbb{Z}_p(1))$$

は zero map. $K_\infty \supset \mu_{p^\infty}$ より, この写像に $\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(n+1)$ した写像 φ_∞ も zero map. □

よって上の Lemma より, 任意の S の素点と素な整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し, $(N\mathfrak{a}^{n+1} - (\mathfrak{a}, K/F))\theta_S(n)$ が $X'(n)_{\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)}$ の annihilator になっていることを示せばよい.

$\kappa : \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/F) \to \mathbb{Z}_p^\times$ を円分指標とする. すなわち, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/F)$ と $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ に対し, $\zeta^\sigma = \zeta^{\kappa(\sigma)}$. $K_m = K(\mu_{p^{m+1}})$, $G_m = \mathrm{Gal}(K_m/F)$ とおき, κ の K_m への制限を κ_m とおく.

Proposition 2.11. 任意の奇素数 p, 整数 $m \geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned}(N\mathfrak{a}^{n+1} - (\mathfrak{a}, K_m/F)) &\sum_{\sigma \in G_m} \zeta_{F,S}(\sigma, -n)\sigma^{-1} \\ &\equiv (N\mathfrak{a}^{n+1} - (\mathfrak{a}, K_m/F)) \sum_{\sigma \in G_m} \zeta_{F,S}(\sigma, 0)\kappa_m(\sigma)^n\sigma^{-1} \pmod{p^{m+1}\mathbb{Z}_p}.\end{aligned}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K_m/F))\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)\sigma^{-1}\\
&=N\mathfrak{a}^{n+1}\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)\sigma^{-1}-\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma(\mathfrak{a},K_m/F),-n)\sigma^{-1}\\
&=\sum_{\sigma\in G_m}\{N\mathfrak{a}^{n+1}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)-\zeta_{F,S}(\sigma(\mathfrak{a},K_m/F),-n)\}\sigma^{-1}\\
&=\sum_{\sigma\in G_m}\delta_{n+1}(\sigma,\mathfrak{a})\sigma^{-1} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

ここで, $\delta_{n+1}(\sigma,\mathfrak{a})=N\mathfrak{a}^{n+1}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)-\zeta_{F,S}(\sigma(\mathfrak{a},K_m/F),-n)$ とおいた. K_m の導手を $\mathfrak{f}_m$(F の整イデアル), $K_{\mathfrak{f}_m}$ を F の mod $\mathfrak{f}_m$ ray class field とする. $\widetilde{\sigma}\in\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{f}_m}/F)=:G_{\mathfrak{f}_m}$ を $\sigma\in G_m$ の延長の一つとし, $\delta_{n+1}(\widetilde{\sigma},\mathfrak{a})=N\mathfrak{a}^{n+1}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma},-n)-\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma}(\mathfrak{a},K_{\mathfrak{f}_m}/F),-n)$ とおく.

$$
\zeta_{F,S}(\sigma,s)=\sum_{\substack{(\mathfrak{a},Km/F)=\sigma\\ \mathfrak{a}\text{ は }S\text{ の素点と素}}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}=\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\ \sum_{\substack{(\mathfrak{a},K_{\mathfrak{f}_m}/F)=\widetilde{\sigma}\\ \mathfrak{a}\text{ は }S\text{ の素点と素}}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}=\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma},s)
$$

より $\zeta_{F,S}(\sigma,-n)=\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma},-n)$ なので,

$$
\begin{aligned}
\delta_{n+1}(\sigma,\mathfrak{a})&=N\mathfrak{a}^{n+1}\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma},-n)-\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma}(\mathfrak{a},K_{\mathfrak{f}_m}/F),-n)\\
&=\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\{N\mathfrak{a}^{n+1}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma},-n)-\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma}(\mathfrak{a},K_{\mathfrak{f}_m}/F),-n)\}\\
&=\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_{\mathfrak{f}_m}\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\delta_{n+1}(\widetilde{\sigma},\mathfrak{a}).
\end{aligned}
$$

Coates の指摘 ([5, Theorem 2]) より

$$\delta_{n+1}(\widetilde{\sigma},\mathfrak{a})\equiv(N\mathfrak{b}_\sigma\mathfrak{a})^n\delta_1(\widetilde{\sigma},\mathfrak{a})\pmod{w_n(K_{\mathfrak{f}_m})\mathbb{Z}_p}.$$

ここで, $\mathfrak{b}_\sigma$ は, $(\mathfrak{b}_\sigma,K_m/F)=\sigma$ を満たす F の整イデアル. よって,

$$\delta_{n+1}(\sigma,\mathfrak{a})\equiv(N\mathfrak{b}_\sigma\mathfrak{a})^n\delta_1(\sigma,\mathfrak{a})\pmod{w_n(K_m)\mathbb{Z}_p}.$$

$p^{m+1}\le w_1(K_m)\le w_n(K_m)$ より, (2.2) から

$$(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K_m/F))\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)\sigma^{-1}\equiv\sum_{\sigma\in G_m}(N\mathfrak{b}_\sigma\mathfrak{a})^n\delta_1(\sigma,\mathfrak{a})\sigma^{-1}\pmod{p^{m+1}\mathbb{Z}_p}. \qquad (2.3)$$

$C_{\mathbb{Q}},C_F$ をそれぞれ $\mathbb{Q},F$ のイデール類群とし, 類体論の可換図式:

$$
\begin{array}{ccc}
C_F & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)\\
N\downarrow & & \downarrow\mathrm{res}\\
C_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})
\end{array}
$$

を考える. ここで, N はノルム写像, res はガロア群を制限する写像である. 可換図式より, p と素な F のイデアル $\mathfrak{b}$ に対し, $(\mathfrak{b}, K_m/F)$ の $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})/\mathbb{Q})$ への制限は $(N\mathfrak{b}, \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})/\mathbb{Q})$. よって, $(\mathfrak{b}, K_m/F)(\zeta_{p^{m+1}}^{\otimes n}) = (N\mathfrak{b})^n(\zeta_{p^{m+1}}^{\otimes n})$ となるので, 指標 $\kappa_m \in \widehat{G}_m$ の定義から,

$$\kappa_m((\mathfrak{b}, K_m/F))^n \equiv (N\mathfrak{b})^n \pmod{p^{m+1}\mathbb{Z}_p}.$$

よって (2.3) より

$$\begin{aligned}
&(N\mathfrak{a}^{n+1} - (\mathfrak{a}, K_m/F)) \sum_{\sigma \in G_m} \zeta_{F,S}(\sigma, -n)\sigma^{-1} \\
&\equiv \sum_{\sigma \in G_m} N\mathfrak{a}^n\ \kappa_m(\sigma)^n \delta_1(\sigma, \mathfrak{a})\sigma^{-1} \\
&\equiv \sum_{\sigma \in G_m} N\mathfrak{a}^n\ \kappa_m(\sigma)^n \{N\mathfrak{a}\ \zeta_{F,S}(\sigma, 0) - \zeta_{F,S}(\sigma(\mathfrak{a}, K_m/F), 0)\}\sigma^{-1} \\
&\equiv N\mathfrak{a}^{n+1} \sum_{\sigma \in G_m} \kappa_m(\sigma)^n \zeta_{F,S}(\sigma, 0)\sigma^{-1} - \sum_{\sigma \in G_m} N\mathfrak{a}^n\ \kappa_m(\sigma)^n \zeta_{F,S}(\sigma(\mathfrak{a}, K_m/F), 0)\sigma^{-1} \\
&\equiv (N\mathfrak{a}^{n+1} - (\mathfrak{a}, K_m/F)) \sum_{\sigma \in G_m} \zeta_{F,S}(\sigma, 0)\kappa_m(\sigma)^n \sigma^{-1} \pmod{p^{m+1}\mathbb{Z}_p}.
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.8 の証明を与える.

Proof of Theorem 2.8. $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)]$ のイデアル I を

$$I = \langle \sigma - \kappa^{-n}(\sigma) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K) \rangle$$

とおく. $K(\mu_{p^\infty})$ は, $K_0 = K(\mu_p)$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大だから, $\Gamma := \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K_0)$ ($\subset \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/F)$) の円分指標 κ での像は乗法群 $1 + p\mathbb{Z}_p$ と同形. γ を $\kappa(\gamma) = 1 + p$ となる Γ の位相的生成元とする. 整数 $e \geq 0$ を $K(\mu_{p^\infty})/K_e$ $(K_e = K(\mu_{p^{e+1}}))$ で分岐する全ての素点が完全分岐となるようにとる.

$$|X'(n)_{\mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)}| = |(X'/IX')(n)| = |X'/IX'| < \infty$$

に注意し, 整数 $m \geq e$ を以下の 2 条件を満たすように十分大きくとる:

- $|X'/IX'| \leq p^{m+1}$.
- $\nu_{m,e}(X'/IX') = 0 \quad (\nu_{m,e} = 1 + \gamma^{p^e} + \gamma^{2p^e} + \cdots + \gamma^{p^m - p^e})$.

[22, §13.3] の議論より, 自然な全射: $A'_m \twoheadrightarrow X'/\nu_{m,e}X'$ が存在する. さらに m のとり方から, 全射: $A'_m/IA'_m \twoheadrightarrow X'/IX'$ が導かれる. この全射と Conjecture 1.8 より, S の素点と素なイデアル $\mathfrak{a}$ に対し, $(N\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}, K_m/F)) \sum_{\sigma \in G_m} \zeta_{F,S}(\sigma, 0)\sigma^{-1}$ は X'/IX' の annihilator. $\zeta = \zeta_{p^{m+1}}$

とおく. $a\otimes\zeta^{\otimes n}\in(X'/IX')(n)=(X'/IX')\otimes\mu_{p^{m+1}}^{\otimes n}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K/F))\theta_S(n)\ (a\otimes\zeta^{\otimes n})\\
&=(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K/F))\sum_{\sigma\in G}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)\sigma^{-1}\ (a\otimes\zeta^{\otimes n})\\
&=(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K/F))\sum_{\sigma\in G}\sum_{\substack{\widetilde{\sigma}\in G_m\\ \text{は }\sigma\text{ の延長}}}\zeta_{F,S}(\widetilde{\sigma},-n)\widetilde{\sigma}^{-1}\ (a\otimes\zeta^{\otimes n})\\
&=(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K_m/F))\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma,-n)\sigma^{-1}\ (a\otimes\zeta^{\otimes n})\\
&=(N\mathfrak{a}^{n+1}-(\mathfrak{a},K_m/F))\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma,0)\kappa_m(\sigma)^n\sigma^{-1}\ (a\otimes\zeta^{\otimes n})\\
&\hspace{20em}(\text{Proposition 2.11 と } m \text{ の条件より})\\
&=\{N\mathfrak{a}^n(N\mathfrak{a}-(\mathfrak{a},K_m/F))\sum_{\sigma\in G_m}\zeta_{F,S}(\sigma,0)\sigma^{-1}a\}\otimes\zeta^{\otimes n}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

□

3 CM 体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の K 群

この節では p を奇素数とし, CM 体 K は 1 の原始 p 乗根 ζ_p を含み, $K(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}$ で p は不分解と仮定する. 整数 m に対し, $K_m=K(\mu_{p^{m+1}})$, $K_\infty=K(\mu_{p^\infty})$, $\Gamma=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ とおく. γ を Γ の位相的生成元とする. $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とおき, Λ を対応 $\gamma\mapsto 1+T$ により $\mathbb{Z}_p$ 上の 1 変数巾級数環 $\mathbb{Z}_p[[T]]$ と同一視する. 任意の整数 $m\geq 0$, i に対し, 多項式 $g_i^{(m)}$ を $g_i^{(m)}=(1+T)^{p^m}-(1+p)^{ip^m}\in\Lambda$ とおく.

K の最大実部分体を K^+ とおき, $\mathrm{Gal}(K/K^+)$ の生成元を J (複素共役) とおく. 群環 $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/K^+)]$ の元 e_+, e_- を

$$e_+=\frac{1+J}{2},\quad e_-=\frac{1-J}{2}$$

とおくと, 任意の $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/K^+)]$ 加群 M は $M=Me_+\otimes Me_-$ と分解する.

$$M^+=Me_+,\quad M^-=Me_-$$

とおく. K_m の整数環を $\mathcal{O}_m$ とおく. 以後, $\mathcal{O}_m$ の K 群の Λ と $\mathrm{Gal}(K/K^+)$ の作用を込めた構造を考える.

<u>奇数次の K 群</u>

Proposition 3.1. 任意の整数 $i\geq 2$ に対し, 次のガロア群の作用を込めた同型が成り立つ.

$$H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p],\mathbb{Z}_p(i))^+\simeq\begin{cases}\mu_{i_pp^{m+1}}^{\otimes i} & (i:\text{偶数}),\\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r}e_-,\mathbb{Z}_p(i)) & (i:\text{奇数}),\end{cases}$$

$$H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p],\mathbb{Z}_p(i))^-\simeq\begin{cases}\mu_{i_pp^{m+1}}^{\otimes i} & (i:\text{奇数}),\\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r}e_-,\mathbb{Z}_p(i)) & (i:\text{偶数}).\end{cases}$$

ここで, $r=\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{2}$, i_p は i を割る最大の p 巾.

Remark 3.2. Conjecture 2.3 を認めれば, 上の命題の左辺はそれぞれ $(K_{2i-1}(\mathcal{O}_m)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^+$, $(K_{2i-1}(\mathcal{O}_m)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^-$ に置き換えられる.

Proof of Proposition 3.1. 任意の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})]]$-加群 M に対し, $\mathbb{Z}_p$-torsion 部分を $\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}M$ とおき, $\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}M = M/\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}M$ とおく. (両者とも $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})]]$-加群となることに注意.)

$\mathbb{Z}_p$-torsion 部分に関しては, Lemma 2.6 と $w_i^{(p)}(K_m) = i_p p^{m+1}$ より,

$$\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]),\mathbb{Z}_p(i))^+ = \begin{cases} \mu_{i_p p^{m+1}}^{\otimes i} & (i:\text{偶数}),\\ 0 & (i:\text{奇数}),\end{cases}$$
$$\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]),\mathbb{Z}_p(i))^- = \begin{cases} \mu_{i_p p^{m+1}}^{\otimes i} & (i:\text{奇数}),\\ 0 & (i:\text{偶数}).\end{cases}$$

よって, 残りの $\mathbb{Z}_p$-free 部分に関して示す. M_∞/K_∞ を p の外不分岐最大アーベル pro-p 拡大, $\mathfrak{X} = \mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p],\mathbb{Z}_p(i)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K_\infty/K_m)}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}/g_i^{(m)}\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i)).\end{aligned}$$

([12, Lemma 2.2] 参照.) Borel の K 群の free 部分に関する結果 [2], p-adic Chern map の全射性と Kernel の有限性から,

$$\begin{aligned} rp^m &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(K_{2i-1}(\mathcal{O}_m)\otimes\mathbb{Z}_p)\\ &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}H^1(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]),\mathbb{Z}_p(i))\\ &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}H^1(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]),\mathbb{Z}_p(i)))\\ &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}/g_i^{(m)}\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i))\\ &= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^+/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^+,\mathbb{Z}_p(i)) + \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-,\mathbb{Z}_p(i)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで, $\mathrm{rank}_\Lambda\mathfrak{X} = r$ かつ $\mathfrak{X}$ は nonzero finite Λ-submodule をもたない (岩澤) ので, ある有限群 Z に対し完全列:

$$0 \to \mathfrak{X} \to \Lambda^{\oplus r}\oplus \mathrm{tor}_\Lambda\mathfrak{X} \to Z \to 0$$

が存在する. $\mathrm{rank}_\Lambda\mathfrak{X}^+ = 0$ より, $\mathrm{rank}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) = r$ なので,

$$0 \to \mathfrak{X}^- \to \Lambda^{\oplus r}\oplus \mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) \to Z' \to 0, \tag{3.2}$$

Z' は有限群. 蛇の補題より,

$$Z'[g_i^{(m)}] \to \mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^- \to \Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r}\oplus \mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) \to Z'/g_i^{(m)}Z' \to 0,$$

$Z'[g_i^{(m)}] = \{z\in Z' \mid g_i^{(m)}z = 0\}$. ($|Z'[g_i^{(m)}]| = |Z'/g_i^{(m)}Z'|$ に注意.)

よって (3.1) から,

$$rp^m = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^+/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^+,\mathbb{Z}_p(i)) + rp^m + \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)).$$

ゆえに,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^+/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^+) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)) = 0 \tag{3.3}$$

となるから,

$$\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p} H^1(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-, \mathbb{Z}_p(i)),\ \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-) = rp^m.$$

もし, $\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)$ が Λ 上 r 個の元で生成されれば, 全射

$$\Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r} e_- \twoheadrightarrow \mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)$$

と $\mathbb{Z}_p$-rank を比べることにより,

$$\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^- \simeq \Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r} e_-$$

となるので,

$$\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^+ = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r} e_-, \mathbb{Z}_p(i)) & (i : 奇数), \\ 0 & (i : 偶数), \end{cases}$$

$$\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^- = \begin{cases} 0 & (i : 奇数), \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})^{\oplus r} e_-, \mathbb{Z}_p(i)) & (i : 偶数) \end{cases}$$

となることが分かる. 残り, $\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)$ が Λ 上 r 個の元で生成されることを示す. 中山の補題より, $\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-) \otimes_\Lambda \Lambda/(T)$ が $\mathbb{Z}_p$ 上 r 個の元で生成されることを示せばよい.

自然な同型:

$$(\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) + g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^- \simeq \mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)/(\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) \cap g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)$$

と全射:

$$\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathrm{tor}_\Lambda\mathfrak{X}^- \ ((3.3)\ より有限群) \twoheadrightarrow \mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-)/(\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) \cap g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)$$

より,

$$(\mathrm{tor}_\Lambda(\mathfrak{X}^-) + g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^- \subset \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-).$$

よって, 次の図式を得る. (縦の写像は全射.)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^-/(\mathrm{tor}_\Lambda\mathfrak{X}^- + T\mathfrak{X}^- + g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-) & \simeq & \dfrac{\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-}{(\mathrm{tor}_\Lambda\mathfrak{X}^- + T\mathfrak{X}^- + g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-} \\ & & \downarrow \\ \mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-) \otimes_\Lambda \Lambda/(T) & \simeq & \dfrac{\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-}{\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-) + (T\mathfrak{X}^- + g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-)/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-} \end{array}$$

完全列 (3.2) より, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/(\mathrm{tor}_\Lambda\mathfrak{X}^- + T\mathfrak{X}^-)) = r$ と上の図式より, $\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^-/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^-) \otimes_\Lambda \Lambda/(T)$ は $\mathbb{Z}_p$ 上 r 個の元で生成される. □

偶数次の K 群

下の命題は, Lemma 2.10 より,

$$H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \simeq X'(i-1)_{\mathrm{Gal}(K_\infty/K_m)} \simeq (X'/g_{1-i}^{(m)}X')(i-1)$$

となることから得られる.

Proposition 3.3. 任意の整数 $i \geq 2$ に対し, 次のガロア群の作用を込めた同型が成り立つ.

$$H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^+ \simeq \begin{cases} (X'^-/g^{(m)}_{1-i}X'^-)(i-1) & (i: \text{偶数}), \\ (X'^+/g^{(m)}_{1-i}X'^+)(i-1) & (i: \text{奇数}), \end{cases}$$

$$H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_m[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^- \simeq \begin{cases} (X'^+/g^{(m)}_{1-i}X'^+)(i-1) & (i: \text{偶数}), \\ (X'^-/g^{(m)}_{1-i}X'^-)(i-1) & (i: \text{奇数}). \end{cases}$$

Remark 3.4. Conjecture 2.3 を認めれば, 上の命題の左辺はそれぞれ $(K_{2(i-1)}(\mathcal{O}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^+$, $(K_{2(i-1)}(\mathcal{O}_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^-$ に置き換えられる.

謝辞

栗原先生及び岩澤理論セミナーのメンバーに助言を頂きました. 特に, Lemma 2.10 で仮定: $K(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}$ で p は不分解が必要なことを, 栗原先生と藤井俊氏に指摘して頂きました. この場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

[1] G. Banaszak, Higher anlogues of Stickelberger's theorem, C. R. Acad. Sci. Paris **337** (2003), 575–580.

[2] A. Borel, Cohomologie réele stable des groupes S-arithmétiques classiques, C. R. Acad. Sci. Paris **271** (1970), 1156–1158.

[3] D. Burns and C. Greither, Equivariant Weierstrass perparation and values of L-functions at negative integers, Documenta Math., Extra Volume in honour of Kazuya Kato (2003).

[4] P. Cassou-Nogués, Valeurs aux entiéres negatif des fonctions zeta et fonctions zeta p-adique, Invent. Math. **51** (1979), 29–59.

[5] J. Coates, Fonctions zêta partielles d'un corps de nombres totalement réel, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres **16**, No. 1, Exp. No. 1, (1975), 1–9.

[6] J. Coates, p-adic L-functions and Iwasawa theory, Algebraic Number Fields (ed. A. Fröhlich), Academic Press (1977).

[7] J. Coates and W. Sinnott, An analogue of Stickelberger's theorem for the higher K-groups, Invent. Math. **24** (1974), 149–161.

[8] J. Coates and W. Sinnott, On p-adic L-functions over real quadratic fields, Invent. Math. **25** (1974), 253–279.

[9] P. Deligne and K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent. Math. **59** (1980), 227–286.

[10] W. Dwyer and E. Friedlander, Algebraic and étale K-theory, Trans. AMS **292** (1985), 247–280.

[11] C. Greither, Arithmetic annihilators and Stark-type conjectures, contmp. Math. **358** (2004), 79–125.

[12] M. Kolster, T. Nguyen Quang Do and V. Fleckinger, Twisted S-units, p-adic class number formulas, and the Lichtenbaum conjectures, Duke Math. J. **84** (1996), 679–717.

[13] T. Kubota and H. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. Reine. Angew. Math. **213** (1964), 328–339.

[14] M. Kurihara, Iwasawa theory and Fitting ideals, J. Reine. Angew. Math. **561** (2003), 39–86.

[15] T. Nguyen Quang Do, Analogues supérieurs du noyau sauvage, Sém. Théor. Nombres Bordeaux **4** (1992), 263–271.

[16] T. Nguyen Quang Do, Conjecture principale équivariante, idéaux de Fitting et annulateurs en théorie d'Iwasawa, J. Théor. Nombres Bordeaux **17** (2005), 643–668.

[17] P. Schneider, Über gewisse Galoiscohomologiegruppen, Math. Z. **168** (1979), 181–205.

[18] J.-P. Serre, Galois cohomology, Springer-Verlag (1997).

[19] C. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gott. Nach. **3** (1970), 15–56.

[20] V. P. Snaith, Algebraic K-groups as Galois Modules, Progress in Mathematics **206** (2002) Birkhäuser.

[21] C. Soulé, K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, Invent. Math. **55** (1979), 251–295.

[22] L. Wasington, Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 83, Springer-Verlag (1997).

[23] A. Wiles, On a conjecture of Brumer, Annals of Math. **131** (1990), 555–565.