

Some aspects on (in)divisibility of special values of zeta functions associated to quadratic fields

木村巖* (富山大学)

概 要

有限次 CM 体に対して M. Kolster が定義した高次相対類数の可除性・非可除性を, 虚 2 次体の場合に考察する.

1 イントロダクション

1.1 記号など

集合 S の濃度を $\#S$ と書く.

$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ をそれぞれ, 自然数の集合, 有理整数環, 有理数体とする. 複素数体 $\mathbf{C}$ 内に $\mathbf{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbf{Q}}$ を 1 つ固定し, 代数体 ($\mathbf{Q}$ の代数的拡大) は全てその部分体とする.

代数体 k に対して, O_k , $D(k)$, $\text{Cl}(k)$, $h(k) = \#\text{Cl}(k)$ をそれぞれ, k の整数環, 判別式, イデアル類群, 類数とする. ただし, k が判別式 D を持つ 2 次体の場合 ($k = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$), その整数環, 類数をそれぞれ, O_D , $h(D)$ と書く. $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ に対応する Dirichlet 指標を $\chi_D(\cdot) = (D/\cdot)$ と書き, それに付随する Dirichlet L 関数を $L(s, \chi_D)$ とする.

有限 Abel 群 G に対して $\exp(G)$ でその exponent, G_{tor} で torsion 部分を表す.

有理素数 p に対して, $v_p(a)$ は $a \in \mathbf{Q}$ の加法的付値で $v_p(p) = 1$ と正規化されているもの, $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ をそれにより定まる乗法的付値とする.

1.2 導入

2 次体のイデアル類群の分布については, 様々な研究がなされてきた. もっとも古いものでは, 2 元 2 次形式の言葉で述べられている, Gauss に遡る類数の平均値の振るまいや, 類数 1 の 2 次体の分布に関する問題¹がある.

2 次体のイデアル類群の奇数部分の分布についての包括的な予想として, Cohen-Lenstra heuristics がある (H. Cohen-H. Lenstra [6, 7]). 彼らは, 虚 2 次体のイデアル類群は「ランダムに分布している」という事を定式化し, そこから, いろいろな条件を課した 2 次体の族の密度に関する予想を述べた. 実 2 次体の場合にも, 多少考慮すべきことがあるものの, 同様の予想を述べている. 類数の非可除性に絞っていえば, 次のようになる:

*2007 年 8 月 29 日, 於 九州大学箱崎キャンパス. This research was partially supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), 18740004, The Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

¹C. F. Gauss, 高瀬訳「ガウス整数論」, 朝倉書店, の 301–304 節参照.

予想 (Cohen-Lenstra). 奇素数 l に対して, 次の等式が成り立つか?

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{-X < D < 0 \mid l \nmid h(D)\}}{\#\{-X < D < 0\}} \stackrel{?}{=} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{l^i}\right), \quad \text{虚 2 次体の場合}$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 < D < X \mid l \nmid h(D)\}}{\#\{0 < D < X\}} \stackrel{?}{=} \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{l^i}\right), \quad \text{実 2 次体の場合}$$

ただし, 左辺の極限の存在も, 予想の一部である.

このような困難な問題の解決への糸口を探るため, 対象を拡張してみることは初期から提案されていた (Cohen-Lenstra [6] 末尾). 有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線 $E: y^2 = f(x)$ と平方自由な整数 D に対して, その 2 次ひねりを $E_D: Dy^2 = f(x)$ と定義する. E_D の Tate-Shafarevich 群 $\text{III}(E_D)$ や Selmer 群の位数について, 上記の類数の非可除性と同じ問題を考える (cf. Delaunay [9], James-Ono [12], Kohnen-Ono [15]). 或いは, E_D の Mordell-Weil 群 $E_D(\mathbf{Q})$ ($\mathbf{Q}$ -有理点のなす有限生成 Abel 群) の階数 $\text{rank}(E_D(\mathbf{Q}))$, E_D の L 関数の中心値の非消滅について, 次のような予想もある (cf. Goldfeld [10, Conjecture (B)]).

予想 (Goldfeld).

$$\frac{\#\{|D| < X \mid \text{rank}(E_D(\mathbf{Q})) \neq 0\}}{\#\{|D| < X\}} \stackrel{?}{\sim} \frac{X}{2},$$

$$\frac{\#\{|D| < X \mid L(E, (\frac{D}{n}), 1) \neq 0\}}{\#\{|D| < X\}} \stackrel{?}{\sim} \frac{X}{2}.$$

楕円曲線に対して定式化された問題を, 楕円保型形式に対して拡張することは自然な発想である. 重み k , レベル N , 指標 ξ の cusp form $f(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)q^n$, $q = \exp(2\pi iz)$, $\Im(z) > 0$ に対して, その 2 次ひねりを $f_D(z) = \sum_{n \geq 1} a(n)(\frac{D}{n})q^n$ で定義する. D を動かしたときに, $f_D(z)$ に付随する L 関数の中心値の非消滅や, その代数的部分の素数 p での非可除性を考えるのである (cf. M. Chida [3, 4]). このような問題は, 2 次指標でのひねりが意味を持つような様々な状況へ拡張される.

2 別の方向への一般化

対象を, 代数体から楕円曲線・保型形式へと一般化するのではなく, 代数体に付随する, イデアル類群以外の不変量へと広げる方向で議論をしてみたい.

この場合ヒントになるのは, 代数体のゼータ関数・ L 関数の特殊値と代数的 K 群の位数との関係を与える予想である:

1. $D < -6$ なら $h(D) = L(0, \chi_D)$.
2. $K_0(O_D)_{\text{tor}} = \text{Cl}(\mathbf{Q}(\sqrt{D}))$.
3. Birch-Tate 予想 (cf. Tate [23, §4, (29)]) 任意の有限次総実代数体 F に対し,

$$w_2(F) := \max\{n \mid \exp(\text{Gal}(F(\zeta_n)/F)) \mid 2\},$$

$$\xi_2(F) := w_2(F)\zeta_F(1 - \mathbf{2})$$

とすると,

$$\#K_2(O_F) = |\xi_2(F)|,$$

ただし左辺は F の tame kernel ($= F$ の整数環 O_F の 2 番目の代数的 K 群).

Birch-Tate 予想は更に, 有限次総実代数体 F と正の偶数 n に対して有理数 $\zeta_F(1-n)$ の分子と分母を, O_F の代数的 K 群の位数で記述する Quillen-Lichtenbaum 予想 (cf. Lichtenbaum [18, Conj. 2.4]) へと拡張されていて, 岩澤主予想の帰結として, 解決されている場合もある (Mazur-Wiles, Wiles [19, 25], Weibel [24, Th. 77]).

3 L 関数の特殊値と Kolster の高次相対類数

代数体 F , 自然数 n に対して $w_n(F)$ を次のように定義する:

$$w_n(F) := \max\{m \mid \exp(\text{Gal}(F(\zeta_m)/F)) \mid n\}.$$

n が奇数で $D < 0$ が虚 2 次体の判別式の時,

$$\xi_n(D) := w_n(\mathbf{Q}(\sqrt{D}))L(1-n, \chi_D)$$

と定義する.

代数体 F , 素数 p に対し, $O_F[\frac{1}{p}]$ を F の p -整数環とする.

$$H_{\text{ét}}^2(O_F[\frac{1}{p}], \mathbf{Z}_p(n)) := \varprojlim_m H_{\text{ét}}^2(O_F[\frac{1}{p}], \mu_{p^m})$$

を étale cohomology 群とする. 右辺は p 乗写像 $\mu_{p^{m+1}} \rightarrow \mu_{p^m}$ が引き起こす写像に関する射影極限. 更に,

$$H^2(O_F, \mathbf{Z}(n)) := \prod_p H_{\text{ét}}^2(O_F[\frac{1}{p}], \mathbf{Z}_p(n))$$

とする. M. Kolster [16] は, 有限次 CM 体の高次相対類数を定義した: K を有限次 CM 体, K^+ をその最大実部分体とする. このとき, K の高次 (n 次) 相対類数 $h_n^-(K)$ を,

$$h_n^-(K) := \frac{\#H^2(O_K, \mathbf{Z}(n))}{\#H^2(O_{K^+}, \mathbf{Z}(n))}$$

で定義する. 特に $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ が虚 2 次体のとき,

$$h_n^-(D) := h_n^-(\mathbf{Q}(\sqrt{D})) = \frac{\#H^2(O_D, \mathbf{Z}(n))}{\#H^2(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(n))}.$$

分母については次が知られている (cf. Kurihara [17, §1]).

- 素数 p について $p \nmid h(\mathbf{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})) \Leftrightarrow$ 任意の奇数 n について, $H_{\text{ét}}^2(\mathbf{Z}[1/p], \mathbf{Z}_p(n)) = \{0\}$.
- Vandiver 予想 $\Leftrightarrow h_n^-(D)$ の分母 $= 1$.

Kolster の高次相対類数に関する解析的類数公式は, 虚 2 次体の場合, 次の様になる (Vandiver 予想のもと. Kolster 上掲論文末尾の Example 参照):

任意の奇数 n に対して,

$$|\xi_n(D)| = 4h_n^-(D).$$

$n = 3$ のとき, $H^2(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}(3)) = \{0\}$ は知られている (Rognes [21], Soulé [22]).

4 問題

我々の考えたい問題は、以上の準備を用いて、次のように述べられる。

問題. p を奇素数, n を奇数とする。

1. $\{D < 0 \mid p \nmid \xi_n(D)\}$ は無限集合か? (上で見たように, $p \nmid \xi_n(D) \Leftrightarrow p \nmid h_n^-(D) \Leftrightarrow H^2(O_D, \mathbf{Z}(n)) = 0$)

- 2.

$$\frac{\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid \xi_n(D)\}}{\#\{-X < D < 0\}}$$

は $X \rightarrow \infty$ のとき, どう振る舞う?

3. **Cohen-Lenstra Heuristics** のようなものはあるか?

4. 割れる方についても同様.

4.1 既知の結果から従うこと

L 関数の負の整数点での特殊値の非可除性について, Bruinier [1, §5] が次の事を示している。

定理 4.1 (J. Bruinier). $n \in \mathbf{N}$: 奇数, p : 奇素数, $(p-1) \nmid 2n$, $v_p(L(1-n, \chi_{-4})) = 0$. このとき

$$\exists^\infty D < 0 \text{ 判別式 s.t. } v_p(L(1-n, \chi_D)) = 0.$$

(ただし, 同論文で示されているのは実 2 次体の場合で, 上の結果は暗示されているのみである). Harris-Segal [11, Lemma], 若しくは Kimura [13, Lemma 2.2] より, 次のことが言える:

系 4.2. $n \in \mathbf{N}$, p : 奇素数, $(p-1) \nmid 2n$, $v_p(L(1-n, \chi_{-4})) = 0$. このとき $\exists^\infty D < 0$ s.t. $v_p(\xi_n(D)) = 0$.

可除性については, Carlitz [2], Coates-Lichtenbaum [5, Lemma 6.8] により, 次のようなことが示されている:

定理 4.3 (Carlitz, J. Coates-S. Lichtenbaum). p : 有理素数, χ : 原始的奇 Dirichlet 指標で, $\chi(p) = 1$, $n \in \mathbf{N}$ s.t. $p^e(p-1) \mid n$ を或る $e \geq 0$ で満たすものとする. このとき $p^{e+1} \mid L(-n, \chi)$.

特に, $p-1 \mid n$ (よって n は偶数) で, p が虚 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ で分解するならば, $p \mid L(1-(n+1), \chi_D)$. つまり $p \mid \xi_{n+1}(D)$.

5 非可除性について (類数関係式から)

一般化類数に関する類数関係式から, 非可除性が導かれる。

H. Cohen [8] の一般化類数 $H(r, N)$ を次で定義する:

$$H(r, N) = \begin{cases} 0 & \text{if } N \not\equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ \zeta(1-r) = -\frac{B_r}{r} & \text{if } N = 0, \\ L(1-r, \chi_D) \times \sum_{d \mid f} \mu(d) \chi_D(d) d^{r-1} \sigma_{2r-1}\left(\frac{f}{d}\right) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ただし, $(-1)^r N = Df^2$, D は判別式, χ_D は 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ に対応する指標, $\mu(\cdot)$ は Möbius 関数, $\sigma_k(\cdot)$ は約数の k 乗和関数.

$r = 3, 5$ の場合, Cohen (上掲論文) により, 次の類数関係式が示されている:

事実 (H. Cohen). 奇数 l , 自然数 m について,

$$\begin{aligned}\sum_s H(3, l - s^2) &= -\frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 7} \sigma_3(l), \\ \sum_s H(5, 4m - s^2) &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{11} \sigma_5(m),\end{aligned}$$

ただし和は $l - s^2 \geq 0$ なる s を渡る.

素数 p に対して, l, m を, 右辺が $\text{mod } p$ で 0 でならないように取れるので, 次の事が示される:

定理 5.1. 1. $r = 3$ のとき, $p \geq 11$ に対して $\exists^\infty D < 0$ s.t. $v_p(L(1 - 3, \chi_D)) = 0$.

2. $r = 5$ のとき, $p \geq 13$ に対して $\exists^\infty D < 0$ s.t. $v_p(L(1 - 5, \chi_D)) = 0$.

系 5.2. 1. $p \geq 11$ に対して $\exists^\infty D < 0$ s.t. $p \nmid h_3^-(D)$.

2. $p \geq 13$ に対して $\exists^\infty D < 0$ s.t. $p \nmid h_5^-(D)$.

2 つの虚 2 次体の合成で得られる $(2, 2)$ 型の虚 Abel 体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ については,

$$h_n^-(K) = h_n^-(D_1) \cdot h_n^-(D_2) \times (\text{2-power})$$

が成立 (Kolster (*loc. cit.*)). よって,

系 5.3. 1. $p \geq 11$ に対して, $p \nmid h_3^-(K)$ となる $(2, 2)$ 型総虚 4 次体 K が無数に存在する.

2. $p \geq 13$ に対して, $p \nmid h_5^-(K)$ となる $(2, 2)$ 型総虚 4 次体 K が無数に存在する.

6 非可除性について (保形型式を用いて)

6.1 結果

定理 6.1. $r \in \mathbf{N}$: 奇数, $p > 3$: 奇素数で $(p-1) \nmid r+1$ を満たすものとする. 基本判別式 D_0 で $p \nmid D_0$, $|B(r, \chi_{D_0})|_p = 1$ を満たすものが存在すると仮定する.

このとき, 次の不等式が成立:

$$\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid \xi_r(D)\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X} \quad (X \gg 0).$$

定理の仮定部分 (基本判別式 D_0 で $p \nmid D_0$, $|B(r, \chi_{D_0})|_p = 1$ を満たすものが存在するか否か) については, 個々の r に対しては数値的に直接検証することができる.

$r = 3$ のとき $B(3, \chi_{-3}) = 2/3$, $r = 5$ のとき $B(5, \chi_{-3}) = -10/3$. このとき $p \geq 7$ なら $(p-1) \nmid (3+1)$, $p \geq 11$ なら $p-1 \nmid (5+1)$ だから

系 6.2. 1. 素数 $p \geq 7$ について, 次が成立:

$$\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid \xi_3(D)\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X} \quad (X \gg 0).$$

2. 素数 $p \geq 11$ について, 次が成立:

$$\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid \xi_5(D)\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X} \quad (X \gg 0).$$

$\xi_3(D), \xi_5(D)$ の部分を, 高次相対類数に置き換えたものが成立, 即ち

系 6.3. 1. 素数 $p \geq 7$ について, 次が成立:

$$\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid h_3^-(D)\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X} \quad (X \gg 0).$$

2. 素数 $p \geq 11$ について, 次が成立:

$$\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid h_5^-(D)\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X} \quad (X \gg 0).$$

また, 系 5.3 の前と同じ理由から,

系 6.4. 1. 素数 $p \geq 7$ について, 次が成立: $p \nmid h_3^-(K)$ となる $(2, 2)$ 型虚 Abel 体 K が無数に存在する.

2. 素数 $p \geq 11$ について, 次が成立: $p \nmid h_5^-(K)$ となる $(2, 2)$ 型虚 Abel 体 K が無数に存在する.

6.2 証明について

$H(r, N)$ を係数に持つような半整数重みの保形型式が存在する: (H. Cohen, 上掲論文, Koblitz [14, Chap. 4 §2])

$$\mathcal{H}_r(z) = \sum_{N \geq 0} H(r, N) q^N \in M_{r+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4), 1) \cap \mathbf{Q}[[q]], \quad q = \exp(2\pi iz).$$

$\mathcal{H}_r(z)$ を用いて, 次のようなことが示される: (議論は K. Ono [20], Kimura (上掲) と同様)

定理 6.5. $r \in \mathbf{N}$: 奇数, $p > 3$: 奇素数で $(p-1) \nmid r+1$ を満たすものとする. 基本判別式 $D_0 < 0$ で $p \nmid D_0$, $|B(r, \chi_{D_0})|_p = 1$ を満たすものが存在すると仮定する.

このとき, 算術級数 $r_p \pmod{t_p}$ で, $(r_p, t_p) = 1$ をみたすものと, 定数 $\kappa(p)$ で次の全てを満たすものが存在:

奇素数 $l \equiv r_p \pmod{t_p}$ それぞれについて, 整数 d_l であって $1 \leq d_l \leq \kappa(p)l$ かつ次の二条件を満たすものが存在する:

1. $D_l = -d_l l p$ は基本判別式.

2. $p \nmid \xi_r(D_l)$.

7 数値例

$\xi_r(D) = w_r(D)L(1-r, \chi_D)$ を数値的に計算するのは難しくない (2 次体の指標に関する一般化 Bernoulli 数の計算). Cohen(上掲論文) により, $r = 3$ の場合の $H(3, N)$ の計算は, 約数の冪和の計算に帰着されている.

$$H(3, N) = -\frac{1}{126} \sum_s s_2(N - s^2),$$

$$s_2(n) = \sum_{d|n} \left(\left(\frac{n}{d} \right)^2 - 2d^2 \right) \chi_{-4}(d) \text{ for } n > 0, \quad s_2(0) = 1/2.$$

和は, 引数が非負の範囲を動く.

奇数 r , 奇素数 p , 正の実数 X に対して,

$$d(r, p, X) := \frac{\#\{-X < D < 0 \mid p \nmid \xi_r(D)\}}{\#\{-X < D < 0\}}$$

とする.

数値例. $r = 3$ として $X = 10^5$ までの負の判別式 D について, $\xi_3(D)$ を計算. 素数 $p = 7, 11, 13, 17, 19$ について, $d(3, p, 10^5)$ の表:

$$\begin{aligned} d(3, 7, 10^5) &= 0.847328, & d(3, 11, 10^5) &= 0.893524, \\ d(3, 13, 10^5) &= 0.917412, & d(3, 17, 10^5) &= 0.940082, \\ d(3, 19, 10^5) &= 0.946137. \end{aligned}$$

謝辞

第 2 回福岡数論研究集会をお世話してくださいました皆様に御礼申し上げます.

参考文献

- [1] Jan Hendrik Bruinier, *Nonvanishing modulo l of Fourier coefficients of half-integral weight modular forms*, Duke Math. J. **98** (1999), no. 3, 595–611. MR 2000d:11061
- [2] L. Carlitz, *Arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers*, J. Reine Angew. Math. **202** (1959), 174–182. MR 22 #20
- [3] M. Chida, *Indivisibility of orders of Selmer groups for modular forms*, preprint (2007).
- [4] ———, *A note on Iwasawa invariants for quadratic twists of modular forms*, preprint (2007).
- [5] J. Coates and S. Lichtenbaum, *On l -adic zeta functions*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 498–550. MR MR0330107 (48 #8445)
- [6] H. Cohen and H. W. Lenstra, Jr., *Heuristics on class groups*, Number theory (New York, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 1052, Springer, Berlin, 1984, pp. 26–36. MR MR750661

- [7] ———, *Heuristics on class groups of number fields*, Number theory, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983), Springer, Berlin, 1984, pp. 33–62. MR 85j:11144
- [8] Henri Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L -functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217** (1975), no. 3, 271–285. MR 52 #3080
- [9] Christophe Delaunay, *Heuristics on Tate-Shafarevitch groups of elliptic curves defined over $\mathbb{Q}$* , Experiment. Math. **10** (2001), no. 2, 191–196. MR MR1837670 (2003a:11065)
- [10] Dorian Goldfeld, *Conjectures on elliptic curves over quadratic fields*, Number theory, Carbondale 1979 (Proc. Southern Illinois Conf., Southern Illinois Univ., Carbondale, Ill., 1979), Lecture Notes in Math., vol. 751, Springer, Berlin, 1979, pp. 108–118. MR MR564926 (81i:12014)
- [11] B. Harris and G. Segal, *K_i groups of rings of algebraic integers*, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 20–33. MR MR0387379 (52 #8222)
- [12] Kevin James and Ken Ono, *Selmer groups of quadratic twists of elliptic curves*, Math. Ann. **314** (1999), no. 1, 1–17. MR MR1689260 (2000j:11095)
- [13] I. Kimura, *Indivisibility of special values of zeta functions associated to real quadratic fields*, Surikaiseki Kenkyujo Kôkyûroku Bessatsu (2007).
- [14] Neal Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 97, Springer-Verlag, New York, 1993. MR MR1216136 (94a:11078)
- [15] Winfried Kohnen and Ken Ono, *Indivisibility of class numbers of imaginary quadratic fields and orders of Tate-Shafarevich groups of elliptic curves with complex multiplication*, Invent. Math. **135** (1999), no. 2, 387–398. MR 1 666 783
- [16] Manfred Kolster, *Higher relative class number formulae*, Math. Ann. **323** (2002), no. 4, 667–692. MR 2003i:11168
- [17] Masato Kurihara, *Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K -groups of $\mathbf{Z}$* , Compositio Math. **81** (1992), no. 2, 223–236. MR MR1145807 (93a:11091)
- [18] Stephen Lichtenbaum, *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K -theory*, Algebraic K -theory, II: “Classical” algebraic K -theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 489–501. Lecture Notes in Math., Vol. 342. MR MR0406981 (53 #10765)
- [19] B. Mazur and A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$* , Invent. Math. **76** (1984), no. 2, 179–330. MR 85m:11069
- [20] Ken Ono, *Indivisibility of class numbers of real quadratic fields*, Compositio Math. **119** (1999), no. 1, 1–11. MR 1 711 515

- [21] John Rognes, *$K_4(\mathbf{Z})$ is the trivial group*, Topology **39** (2000), no. 2, 267–281. MR MR1722028 (2000i:19009)
- [22] C. Soulé, *On the 3-torsion in $K_4(\mathbf{Z})$* , Topology **39** (2000), no. 2, 259–265. MR MR1722032 (2000i:19008)
- [23] John Tate, *Symbols in arithmetic*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 201–211. MR MR0422212 (54 #10204)
- [24] Charles Weibel, *Algebraic K-theory of rings of integers in local and global fields*, Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, Springer, Berlin, 2005, pp. 139–190. MR MR2181823 (2006g:11232)
- [25] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 3, 493–540. MR 91i:11163