Newton 級数の多重 L 値への応用 (田中立志氏との共同研究)

川島 学 (名古屋大学)

最近, 金子昌信教授により提唱された多重ゼータ値の間の予想関係式, 一般導分関係式 [Kan] が田中立志氏により証明された [Ta]. その際, 筆者の示した多重ゼータ値のある関係式 [Kaw] が用いられた. 今回, 田中立志氏との共同研究により, この結果の多重 L 値への一般化を得たので報告する. ただし, 筆者が担当したのは議論の前半部分のみであるため, その部分の概要を紹介させていただく.

1 序

定義 1. m, p を 1 以上の整数とする. $k_1, \dots, k_p$ を 1 以上の整数とし, $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ を 1 の m 乗根とする. ただし, $\zeta_1 = 1$ のときは $k_1 \geq 2$ とする. このとき,

$$L_{ш}(k_1, \dots, k_p; \zeta_1, \dots, \zeta_p) := \sum_{n_1 > \cdots > n_p > 0} \frac{\zeta_1^{n_1 - n_2} \cdots \zeta_{p-1}^{n_{p-1} - n_p} \zeta_p^{n_p}}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}}$$

を多重 L 値という. 又, $k_1 + \cdots + k_p$ を多重 L 値 $L_{ш}(k_1, \dots, k_p; \zeta_1, \dots, \zeta_p)$ の重さという.

$m = 1$ のときは多重ゼータ値という:

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) := \sum_{n_1 > \cdots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}} \quad (k_1 \geq 2).$$

後に

$$\overline{\zeta}(k_1, \dots, k_p) := \sum_{n_1 \geq \cdots \geq n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}} \quad (k_1 \geq 2)$$

も使う.

多重 L 値の間にはたくさんの $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式が存在する. そのことを多重ゼータ値の場合にみる. $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 Z_k $(k \geq 0)$ を

$$Z_0 = \mathbb{Q},$$
$$Z_k = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_p = k \\ k_1 \geq 2}} \mathbb{Q}\, \zeta(k_1, \dots, k_p)$$

で定義する. 数列 $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ を

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_k = d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3)$$

で定義するとき, $\dim_{\mathbb{Q}} Z_k$ に関して次のことが予想されている.

予想 2 (Zagier [Z]). $\dim_{\mathbb{Q}} Z_k = d_k \quad (k \geq 0)$.

又, 次のことが証明されている.

定理 3 (Goncharov [G], Terasoma [Te]). $\dim_{\mathbb{Q}} Z_k \leq d_k \quad (k \geq 0)$.

表

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^{k-2}	1	2	4	8	16	32	64	128	256
d_k	1	1	1	2	2	3	4	5	7

(2^{k-2} は重さ k の多重ゼータ値の個数) をみると, 多重ゼータ値の間には驚くほど多くの $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式のあることが分かる. ところで, 定理 3 は数論幾何の方法を用いて証明されており, 具体的にどのような関係式が存在するのかは分からないようである. そこで,

重さ k の多重ゼータ値間の独立な線形関係式を $2^{k-2} - d_k$ 個構成せよ.

という問題が残る. 多重 L 値に対しても事情は全く同じであり, 今回の共同研究はこの問題に対する考察と位置付けることができる.

2 多重ゼータ値の場合

この節では, 先行する多重ゼータ値の研究について述べる. 以下, $\mathbb{N}$ は非負整数の集合とする.

定義 4. 1 以上の整数 $k_1, \ldots, k_p$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_{k_1,\ldots,k_p}(n) = \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)^{k_1} \cdots (n_p+1)^{k_p}}$$

と定義する.

定義 5. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ に対して
(1) $(\Delta a)(n) = a(n) - a(n+1) \quad (n \in \mathbb{N})$,
(2) $\Delta^k a = \begin{cases} a & (k=0) \\ \Delta(\Delta^{k-1} a) & (k \geq 1), \end{cases}$
(3) $(\nabla a)(n) = (\Delta^n a)(0)$
と定義する. ∇a を a の反転ということにする.

命題 6. $k_1, \ldots, k_p$ を 1 以上の整数とする. このとき

$$\nabla a_{k_1,\ldots,k_p} = a_{(k_1,\ldots,k_p)^*}.$$

すなわち, 定義 4 で定義した多重和の反転は再び同じ形の多重和となる. $(k_1, \ldots, k_p)^*$ の定義を例で説明する:

$$\begin{array}{cc} & 3 \\ 1 & \bigcirc \\ 1 & \bigcirc \\ 1 & \bigcirc \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 2 & 1 \\ 1 & \bigcirc & \\ 2 & \bigcirc & \bigcirc \\ & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \\ 1 & & & \bigcirc & \\ 2 & & & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

$$(1,1,1)^* = (3) \qquad (1,2)^* = (2,1) \qquad (3,1,2)^* = (1,1,3,1)$$

多重和 $a_{k_1,\ldots,k_p}(n)$ を補間する Newton 級数を導入することは, 命題 6 より自然であろう. まず, $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ に対して

$$(\nabla a)(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k)$$

なることに注意する. 数列 a を補間する Newton 級数とは

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nabla a)(n) \binom{s}{n}$$

のことである. この級数はある半平面 $\mathrm{Re}\, s > \rho$ ($\rho \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) で収束し, $\mathrm{Re}\, s < \rho$ では発散する. 又, $s = n \in \mathbb{N}$ でとる値は

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\nabla a)(k) \binom{n}{k} = (\nabla^2 a)(n) = a(n)$$

である. さて, $a_{k_1,\ldots,k_p}(n)$ を補間する Newton 級数

$$\begin{aligned} f_{k_1,\ldots,k_p}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nabla a_{k_1,\ldots,k_p})(n) \binom{s}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{(k_1,\ldots,k_p)^*}(n) \binom{s}{n} \end{aligned}$$

を考える. この級数は $k_1 = 1$ のとき $\mathrm{Re}\, s > -2$ で収束し, しかも

$$f_{k_1,\ldots,k_p}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{(k_1,\ldots,k_p)^*}(n) = \overline{\zeta}((k_1,\ldots,k_p)^*)$$

である. この事実を利用して多重ゼータ値の関係式を得ることができるが, それを一番簡単な例で説明しよう. 定義より

$$\begin{aligned} a_{1,1}(n)\, a_{1,1}(n) &= \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{n \geq n_1 \geq 0} \frac{1}{n_1+1} \right\} \times \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{n \geq n_2 \geq 0} \frac{1}{n_2+1} \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \left\{ \sum_{n \geq n_1 \geq n_2 \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)} + \sum_{n \geq n_2 \geq n_1 \geq 0} \frac{1}{(n_2+1)(n_1+1)} \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{n \geq n_1 \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{n+1} \{ 2\, a_{1,1,1}(n) - a_{1,2}(n) \} \end{aligned}$$

であるから,

$$(n+1)\, a_{1,1}(n)^2 = 2\, a_{1,1,1}(n) - a_{1,2}(n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

実は, 多重和の間のこの関係式に由来する関数関係式

$$(s+1)\, f_{1,1}(s)^2 = 2\, f_{1,1,1}(s) - f_{1,2}(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > -2)$$

が成り立つ．

$$(1,1,1)^* = (3), \quad (1,2)^* = (2,1)$$

だったことに注意すると, 上の式に $s=-1$ を代入して

$$0 = 2\,\overline{\zeta}(3) - \overline{\zeta}(2,1)$$

を得る．

$$\overline{\zeta}(3) = \zeta(3), \quad \overline{\zeta}(2,1) = \zeta(2,1) + \zeta(3)$$

であるから,

$$0 = \zeta(3) - \zeta(2,1).$$

こうして多重ゼータ値の関係式を得ることができた．一般の場合

$$a_{1,k_1,\ldots,k_p}(n)\, a_{1,l_1,\ldots,l_q}(n)$$

でも同様である．このようにして, たくさんの多重ゼータ値の関係式を得ることができる．田中立志氏はこれらの関係式から一般導分関係式が従うことを示した.

3　多重 L 値の場合

第 2 節の内容を多重 L 値へと拡張するには, 多重和の反転公式を拡張する必要がある.

定義 7. p を 1 以上の整数とする．$z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ に対して

$$c_{z_1,\ldots,z_p}(n) = \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{z_1^{n_1-n_2} \cdots z_{p-1}^{n_{p-1}-n_p} z_p^{n_p}}{(n_1+1)\cdots(n_{p-1}+1)}$$

と定義する.

命題 8. p を 1 以上の整数とする．$z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ に対して

$$\nabla c_{z_1,\ldots,z_p} = c_{1-z_1,\ldots,1-z_p}.$$

この命題から命題 6 を導くことができる．それには

$$\nabla c_{z_1,\ldots,z_{p-1},1,0} = c_{1-z_1,\ldots,1-z_{p-1},0,1}$$

に $z_1, \ldots, z_{p-1} = 0, 1$ を代入すればよい．その際

$$c_{z_1,\ldots,z_{p-1},1,0}(n) = c_{z_1,\ldots,z_{p-1},0,1}(n) = \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{z_1^{n_1-n_2} \cdots z_{p-1}^{n_{p-1}-n_p}}{(n_1+1)\cdots(n_p+1)}$$

に注意する．命題 8 に基づいて第 2 節の議論を繰り返すと, 今度は多重ポリログの関係式が得られる．一番簡単な場合は次のようになる.

$$\begin{aligned}
L_{ш}\{&(1,1,1\,;\, z_0,1,1) - (1,1,1\,;\, z_0,z_1,1) - (1,1,1\,;\, z_0,1,z_1)\\
&+(1,1,1\,;\, z_0,z_1,z_1) - (1,1,1\,;\, z_0,z_0,1) + (1,1,1\,;\, z_0,z_0,z_1)\\
&-(1,2\,;\, z_0,1) + (1,2\,;\, z_0,z_1) + (2,1\,;\, 1,1)\\
&-(2,1\,;\, z_1,1) - (2,1\,;\, 1,z_1) + (2,1\,;\, z_1,z_1)\\
&-(2,1\,;\, z_0,1) + (2,1\,;\, z_0,z_1) - (3\,;\, 1) + (3\,;\, z_1)\} = 0.
\end{aligned}$$

ここで, $|z_0|, |z_1| < 1$. この式に $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_0 = z_1 = 0$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
&L_{ш}\{(2,1\,;\,1,1) - (2,1\,;\,z_1,1) - (2,1\,;\,1,z_1) \\
&\qquad\qquad\qquad + (2,1\,;\,z_1,z_1) - (3\,;\,1) + (3\,;\,z_1)\} = 0, \\
&L_{ш}\{(1,1,1\,;\,z_0,1,1) - (1,1,1\,;\,z_0,z_0,1) - (1,2\,;\,z_0,1) \\
&\qquad\qquad\qquad + (2,1\,;\,1,1) - (2,1\,;\,z_0,1) - (3\,;\,1)\} = 0, \\
&L_{ш}\{(2,1\,;\,1,1) - (3\,;\,1)\} = 0.
\end{aligned}
$$

これら 4 つの式で z_0, z_1 を 1 の m 乗根とすると, 多重 L 値の関係式が得られる. このようにして多重 L 値の関係式がたくさん得られ, 多重ゼータ値のときと同様に多重 L 値の一般導分関係式が導かれる.

参考文献

[G] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint (2001), arXiv: math. AG/0103059.

[Kan] M. Kaneko, On an extension of the derivation relation for multiple zeta values, The Conference on L-Functions, edited by L. Weng and M. Kaneko, World Scientific (2007), 89–94.

[Kaw] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, preprint (2007), arXiv: math. NT/0702824.

[Ta] T. Tanaka, On extended derivation relations for multiple zeta values, preprint (2007), arXiv: math. NT/0710.4920.

[Te] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[Z] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in First European Congress of Mathematics, Vol. II, Progr. Math. **120** (1994), 497–512.