Hecke-Siegel's pull-back formula for the Epstein zeta function with a harmonic polynomial[*] (織田孝幸氏との共同研究)

廣惠 一希[†] (東京大学数理科学研究科)

1 序

1.1 Hecke の積分公式

E.Hecke は [4] において, n 次代数体 K の Dedekind ゼータ関数を n 次正定値二次形式の Epstein ゼータ関数の K の単数群上の積分によって表した. これは虚二次体の場合に Dedekind ゼータ関数が $SL(2,\mathbb{R})$ の実解析的 Eisenstein 級数の特殊値によってあらわされることの一般化となっており, 実二次体の場合には, Kronecker の極限公式等と関連し整数論において古典的な公式である. 本稿ではこの積分公式の拡張として, 被積分関数をより一般の $SL(n,\mathbb{R})$ の Eisenstein 級数までひろげ, 結果として任意代数体の Hecke$L$ 関数に対する積分公式を得ることを目標とする. 先ず, ここでは元となる Hecke の積分公式を復習しておこう.

初めにいくつか記号の準備をする. K を n 次代数体, すなわち $[K\colon\mathbb{Q}]=n$ とし, r_1, r_2 で K の実素点の数, 複素素点の数それぞれを表す. そして $1\le k\le r_1$ に対して各実素点, すなわち $\mathbb{R}$ への体準同型を

$$\sigma_k\colon K\longrightarrow\mathbb{R},$$

また, $1\le k\le 2r_2$ に対して各複素素点, すなわち $\mathbb{C}$ への体準同型を

$$\sigma_{r_1+k}\colon K\longrightarrow\mathbb{C}$$

と書くことにする. ただし, 複素素点は $\sigma_{r_1+j}=\overline{\sigma}_{r_1+r_2+j}$, $(j=1,\cdots,r_2)$ となるようにする. 以後簡単のため $a\in K$ において $a^{(j)}=\sigma_j(a)$ $(j=1,\cdots,n)$ と書くことにする. K の整数環を $\mathcal{O}_K$ で表す. $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ を単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ の基本単数の組とする. ここで $r=r_1+r_2-1$ である.

今, ある $\mathcal{O}_K$ の整イデアル $\mathfrak{b}$ を一つ固定し, $\omega_1,\cdots,\omega_n$ として $\mathfrak{b}$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底としよう. このとき $\mathfrak{b}$ と $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に依る以下のような正定値 n 次対称行列を定義する,

$$Y(\mathfrak{b},x)=\begin{pmatrix}\prod_{i=1}^r|\varepsilon_i^{(1)}|^{2x_i} & & \\ & \ddots & \\ & & \prod_{i=1}^r|\varepsilon_i^{(n)}|^{2x_i}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_1^{(n)} & \cdots & \omega_n^{(n)}\end{pmatrix}\right],$$

[*] 第 2 回福岡数論研究集会, 2007 年 8 月 28 日 (火) – 8 月 30 日 (木), 於 九州大学

[†] E-mail:kazuki@ms.u-tokyo.ac.jp

ここで $A[X] = {}^t\bar{X}AX$ とした. n 次正定値対称行列 Y, $s \in \mathbb{C}$ に対して Epstein ゼータ関数は

$$Z(Y,s) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} \frac{1}{Y[x]^s}$$

と定義され, 以下の公式が Hecke によって示された.

定理 1.1 (Hecke [4]).

$$\int_{x \in [0,1]^r} Z(Y(\mathfrak{b},x), \frac{ns}{2})\, dx = \omega_F \frac{2^{-r_2 s}\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}}{2^{r_1-1}nR\Gamma(ns/2)}\zeta_K(s,A),$$

ここで A は $\mathfrak{b}^{-1}$ のイデアル類, $\zeta_K(s,A)$ で K のイデアル類 A の部分 Dedekind ゼータ関数とする. ω_K は K 内の 1 の冪根の個数, R で K の単数基準を表す.

1.2 様々な Hecke の積分公式の一般化

Hecke の積分公式の一般化は現在まで様々なものが考えられ, 色々な方向に応用がなされているが, ここでは本稿に関係の深い 2, 3 の一般化を紹介しておく.

・アデール化 (Piatetski-Shapiro & Rallis [8])

k を代数体, K を k の n 次拡大体とし, $\mathbb{A}_k$, $\mathbb{A}_K$ でそれぞれのアデールを表す. $\mathbb{A}_k^n$ 上の Schwartz-Bruhat 関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_k^n)$ に対して, $GL(n,\mathbb{A}_k)$ 上の関数 $f^\phi(g,s)$, $g \in GL(n,\mathbb{A}_k)$, $s \in \mathbb{C}$ を以下のように定義する,

$$f^\phi(g,s) = |\det(g)|_{\mathbb{A}_k}^s \int_{\mathbb{A}_k^\times} \phi(ae_0g)|a|_{\mathbb{A}_k}^{ns}\, d^\times a,$$

ここで $e_0 = (0,\cdots,0,1)$ とする. この積分は $\mathrm{Re}s > \frac{1}{n}$ で絶対収束することが知られている. P として $GL(n)$ の n の分割 $(n-1,1)$ に対応する極大放物型部分群をとる。すると $p \in P_{\mathbb{A}_k}$ に対し

$$f^\phi(pg,s) = \left|\frac{\det p}{(c_p)^n}\right|^s f^\phi(g,s)$$

が成り立つことが簡単にわかる. 従ってこのような $f^\phi(g,s)$ に対して極大放物型部分群 P_k に付随する Eisenstein 級数

$$E^\phi(g,s) = \sum_{\gamma \in P_k \backslash GL(n,k)} f^\phi(\gamma g, s)$$

を考えることができる.

このような Eisenstein 級数に対し Hecke の積分公式を考えるために, 先ず, 埋め込み $\iota\colon K^\times \hookrightarrow GL(n,k)$ を構成しよう. $\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m$ によって乗法群 $\mathbb{G}_m$ の Weil restriction を表すと, よく知られたように $\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m$ は k 上定義された n 次元代数トーラスとなる. 従って K/k の基底を固定することによって, k-準同型 $\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m \to GL(n)$ を得る. この k-準同型の k-有理点を考えれば, 埋め込み $\iota\colon K^\times \hookrightarrow GL(n,k)$ を得ることができる. さらにこのアデール化も同じ ι で書く. また上で決めた K/k の基底により $K \cong k^n$ と見れば $P_k\backslash GL(n,k) \cong k^\times\backslash K^\times$ となるこ

とに注意すると, 以下の等式を得ることができる.

$$\begin{aligned}\int_{K^\times\cdot\mathbb{A}_k^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times} E^\phi(\iota(t),s)\,dt &= \int_{K^\times\cdot\mathbb{A}_k^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times}\sum_{\gamma\in P_k\backslash GL(n,k)} f^\phi(\gamma\iota(t),s)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{A}_k^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times} |\det\iota(h)|_{\mathbb{A}_k}^s \int_{\mathbb{A}_k^\times}\phi(ah)|a|_{\mathbb{A}_k}^{ns}\,da\,dh \\ &= \int_{\mathbb{A}_K^\times}\phi(h)|h|_{\mathbb{A}_K}^s\,dh,\end{aligned}$$

ここで, $\mathbb{A}_K\cong\mathbb{A}_k^n$ により $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_k^n)$ を $\mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$ の元と同一視していることに注意しよう. 最後の積分は Tate 積分に他ならないので, これは Hecke の積分公式のアデール化を与えていることがわかる.

・$\mathcal{O}_k^\times\backslash K_\mathbb{R}$ 上の Fourier 展開. (Siegel[9])

以下の章で詳しく述べるが, 上で定義した Epstein ゼータ関数 $Z(Y(\mathfrak{b},x),s)$ は単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ の作用により不変であることがわかる. この単数群不変性から $Z(Y(\mathfrak{b},x),s)$ は $x\in\mathbb{R}^r$ の周期関数であることが定義からわかる. Siegel は実二次体においてこの事実を示し, さらにこの周期性よる $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ での Fourier 展開を考えることにより,

実二次体の Hecke の積分公式	$\longleftrightarrow$	Fourier 展開の定数項
量指標をもつ実二次体の Hecke$L$ 関数	$\longleftrightarrow$	Foureir 展開の一般項

という対応をつけた. 今回の我々の結果は, より一般の Eisenstein 級数に対して考える事によって, この Siegel の公式を任意代数体に拡張し, Hecke L 関数を Eisenstein 級数の積分を用いて表すものである.

さらにこのほかにも Hecke の積分公式は様々な方向での一般化がある (cf, [3], [1], [10], *e.t.c.*).

2 極大放物型 Eisenstein 級数に対する Hecke-Siegel の公式

さて, ここから本論に入る. 序章で述べたように Siegel は Hecke の積分公式を実二次体の場合に単数群不変性から来るある種の Fourier 展開の定数項としてとらえ, さらに一般項を Hecke L 関数として表した. これは実は Eisenstein 級数の $SL(n,\mathbb{Z})\backslash SL(n,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$ 上の解析を $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m\hookrightarrow GL(n)$ の埋め込み写像により $K^\times$ 上に引き戻した $\mathcal{O}_K^\times\backslash K_\mathbb{R}^\times$ 上での解析に他ならない.

2.1 Siegel の調和多項式を持つ Epstein ゼータ関数と $SL(n,\mathbb{R})$ の退化主系列表現からの Eisenstein 級数

Siegel は Epstein ゼータ関数の拡張として調和多項式を持つ Epstein ゼータ関数を定義し, その性質を調べている. この節では, この Epstein ゼータ関数が $SL(n,\mathbb{R})$ の退化主系列表現から作られる Eisenstein 級数と一致することを紹介する. Siegel の調和多項式は, そこでは退化主系列表現の K-タイプに相当する.

$Q(x_1,\cdots,x_n)=Q(x)$ として $\mathbb{R}^n$ の正定値二次形式とし, これに付随する n 次正定値対称行列も Q と書くことにする. このとき Siegel は以下のような Q に付随する調和多項式を考えた.

定義 2.1. 次数 d の n 変数斉次多項式 $h(x)$ が以下を満たすとする.

$$\Delta_{Q^{-1}}h(x)=0.$$

ここで $\Delta_{Q^{-1}}$ は以下で定義される Laplace 作用素である.

$$(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n})Q^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

このような多項式を Q に付随する d 次の調和多項式と呼ぶ.

Siegel は正定値二次形式 $Q(x)$ と Q に付随する d 次の調和多項式 $h(x)$ に対して以下のような Epstein ゼータ関数の拡張を考えた.

$$Z(s,Q,h)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n-\{0\}}\frac{h(x)}{Q(x)^{s+\frac{d}{2}}}.$$

これは $\mathrm{Re}s>\frac{n}{2}$ で絶対収束する. またこれは全平面に有理的に解析接続され, $d\neq 0$ の場合は整関数に拡張できることがわかっている.

次に $SL(n,\mathbb{R})$ の退化主系列の Eisenstein 級数を用意しよう. $G=SL(n,\mathbb{R})$ とし, $K=SO(n,\mathbb{R})$ をその極大コンパクト部分群とする. このとき G の放物型部分群は n の分割に対応して存在するが, ここでは $\{1,n-1\}$ の分割に対応する極大放物型部分群 $P_{n-1,1}$ を考えることにする. 即ち,

$$P_{n-1,1}=\left\{\begin{pmatrix}A & C\\ & b\end{pmatrix}\in G\ ;\ \begin{array}{c}A\in GL(n-1,\mathbb{R}),\ b\in\mathbb{R}^\times\\ c\in\mathbb{R}^{n-1},\ \det A\cdot b=1\end{array}\right\}$$

とする. $P_{n-1,1}=NM$ で M, N をそれぞれ $P_{n-1,1}$ の Levi 部分群, 極大冪単群としよう. 今 $P_{n-1,1}$ の指標を次のように決める.

$$\begin{array}{cccc}\chi_{\nu,\epsilon}\colon & P_{n-1,1} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & \begin{pmatrix}A & C\\ & b\end{pmatrix} & \longmapsto & (\frac{b}{|b|})^\epsilon|b|^\nu\end{array},$$

ここで $\epsilon\in\{0,1\}$, $\nu\in\mathbb{C}$ である. この放物型部分群 $P_{n-1,1}$ の指標 $\chi_{\epsilon,\nu}$ に対し, G 上の関数の空間

$$C(P_{n-1,1}\backslash G\,;\chi_{\epsilon,\nu})=\{f\colon G\to C\ \text{連続}\ ;\ f(pg)=\chi_{\epsilon,\nu}(p)f(g),\ p\in P_{n-1,1},\ g\in G\}$$

を考え, そこへの G の作用を右正則表現で入れる. Eisenstein 級数を定義するためには C^∞ な誘導で十分なのだが, ここでは便宜上内積

$$\langle f,g\rangle=\int_K f(k)\overline{g(k)}\,dk,\ f,g\in C(P_{n-1,1}\backslash G\,;\chi_{\epsilon,\nu})$$

による Hilbert 完備化をとっておく. このように決めた Hilbert 表現を $\pi_{\epsilon,\nu}$ とかき, G の退化主系列表現と呼ぶ.

上の誘導表現 $\pi_{\epsilon,\nu}$ の K-加群としての構造をもう少しみてみよう. この表現空間は G 上の関数の空間であったが, それらを K へ制限することによって $\pi_{\epsilon,\nu}$ は $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_{M\cap K}^K\chi_{\epsilon,\nu}$ と G の作用込みで同型となることに注意する. M の単位連結成分を M^0 とかくことにする. このとき

$K \cap M^0 \backslash K \cong SO(n-1,\mathbb{R})\backslash SO(n,\mathbb{R}) \cong S^{n-1}$ であり, $L^2(S^{n-1})$ は $SO(n,\mathbb{R})$ の作用により調和多項式の空間に既約分解されることは古典的である [5]. 従って,

$$H_d = \left\{ f \text{ は } d \text{ 次の } n \text{ 変数斉次多項式 ; } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} f = 0 \right\}$$

で d 次の調和多項式の空間を表すと, これは $SO(n,\mathbb{R})$ 加群として既約であり, $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_{M\cap K}^{K}\chi_{\epsilon,\nu}$ は以下のように $SO(n,\mathbb{R})$ 加群として既約分解される.

$$L^2\text{-}\mathrm{Ind}_{M\cap K}^{K}\chi_{\epsilon,\nu} \cong \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{\substack{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ d:\mathrm{even}}} H_d & \text{if } \epsilon = 0, \\ \displaystyle\bigoplus_{\substack{d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ d:\mathrm{odd}}} H_d & \text{if } \epsilon = 1. \end{cases}$$

$P^0 = M^0 N$ とおいて $\Gamma_\infty = P^0 \cap SL(n,\mathbb{Z})$ と定義する. このとき Eisenstein 級数は以下のように定義される.

定義 2.2. $f \in H_d$ で d は $\epsilon = 0$ のとき偶数, $\epsilon = 1$ のとき奇数としよう. このとき

$$E(\epsilon,\nu,g;f) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash SL(n,\mathbb{Z})} \chi_{\epsilon,\nu}(p(\gamma g)) f(e_0 k(\gamma g))$$

を Eisenstein 級数という. ここで $e_0 = (0,\cdots,0,1) \in \mathbb{R}^n$ で, $g \in G$ に対し $p(g)$, $k(g)$ で分解 $G = PK$ によるそれぞれの成分を表す.

この分解 $G = PK$ は一意ではないが, 上の定義は分解によらない事に注意する. この級数は $\mathrm{Re}\nu$ が十分大きいところでは絶対収束する. これはいわゆる Langlans の Eisenstein 級数に他ならない [7], [2].

以下で, 混同の心配がない時は $E(g;f) = E(\epsilon,\nu,g;f)$ と書くことにする.

ここで Riemann ゼータ関数 $\zeta(\nu)$ によって $\hat{E}(g;f) = \zeta(\nu)E(g;f)$ として正規化したものを考えると, 先に定義した Siegel の Epstein ゼータ関数に対して以下の等式を得る.

命題 2.3. $g \in G$ に対し正定値対称行列を $Q_g = g \cdot {}^t g$ と定義する. また, $h \in H_d$ (ここで $\epsilon = 0$ のとき d は偶数, $\epsilon = 1$ のとき d は奇数) をとり, $\tilde{h}(x) = h(xg)$ とする. このとき $\tilde{h}(x)$ は Q_g に付随する調和多項式であり, 以下の等式が成り立つ.

$$\hat{E}(\epsilon,\nu,g;h) = Z(\frac{\nu}{2}, Q_g; \tilde{h}).$$

この命題により, 上で定義された Siegel の Epstein ゼータ関数は $SL(n,\mathbb{R})$ の退化主系列表現から来る保型形式であり, Q に付随する調和多項式はその表現の K-タイプとして自然に理解される. 従って, この対応により Hecke の積分公式は保型形式の群 $G = SL(n,\mathbb{R})$ 上の解析を通して考察される.

2.2 $K_{\mathbb{R}}^{\times} \hookrightarrow GL(n,\mathbb{R})$

ここでは上で与えた $SL(n,\mathbb{R})$ の保型形式を代数体 K 上で考えるために, $K_{\mathbb{R}}^{\times} = (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times}$ を $GL(n,\mathbb{R})$ 埋め込む方法を与える. 本質的には Weil restriction $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ の $GL(n)$ への埋

め込みの $\mathbb{R}$-有理点を考えることになる．もちろんこの埋め込みは一意ではなく, 以下では二つの典型的な実現の仕方を考える．さて, $\mathcal{O}_K$ を $\mathbb{Q}$ 上の n 次代数体 K の整数環とする．その整イデアルとして $\mathfrak{b}$ をとり, $\omega_1, \cdots, \omega_n$ をその $\mathbb{Z}$ 上の基底とする．このとき $\omega_1, \cdots, \omega_n$ は $K_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底になるため, $a \in K_{\mathbb{R}}^{\times}$ に対し, $a\omega_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\omega_i$ なる $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ が定まる．これにより $\omega\colon K_{\mathbb{R}}^{\times} \hookrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ を以下のように定める．

$$\begin{array}{cccc} \omega\colon & K_{\mathbb{R}}^{\times} & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{R}) \\ & a & \longmapsto & (a_{ij})_{ij}. \end{array}$$

一方, K の各無限素点によって以下のような埋め込みを考えることができる．

$$\begin{array}{cccc} \lambda\colon & K_{\mathbb{R}}^{\times} & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{R}) \\ & a & \longmapsto & \begin{pmatrix} a^{(1)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a^{(r_1)} & & & \\ & & & \boxed{a^{(r_1+1)}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{a^{(r_1+r_2)}} \end{pmatrix}. \end{array}$$

ここで $\boxed{a^{(r_1+j)}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}a^{(r_1+j)} & -\mathrm{Im}a^{(r_1+j)} \\ \mathrm{Im}a^{(r_1+j)} & \mathrm{Re}a^{(r_1+j)} \end{pmatrix}$ $(j = 1, \cdots, r_2)$ とした．ここに,

$$W_{\mathfrak{b}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \cdots & \omega_1^{(r_1)} & \mathrm{Re}\omega_1^{(r_1+1)} & \mathrm{Im}\omega_1^{(r_1+1)} & \cdots & \mathrm{Re}\omega_1^{(r_1+r_2)} & \mathrm{Im}\omega_1^{(r_1+r_2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_n^{(1)} & \cdots & \omega_n^{(r_1)} & \mathrm{Re}\omega_n^{(r_1+1)} & \mathrm{Im}\omega_n^{(r_1+1)} & \cdots & \mathrm{Re}\omega_n^{(r_1+r_2)} & \mathrm{Im}\omega_n^{(r_1+r_2)} \end{pmatrix}$$

なる $GL(n, \mathbb{R})$ の元を考えると, あきらかに $\omega(a) = W_{\mathfrak{b}}\lambda(a)W_{\mathfrak{b}}^{-1}$ $(a \in K_{\mathbb{R}}^{\times})$ をみたし, $W_{\mathfrak{b}}$ は埋め込み λ から ω への変換行列となっている．

これらの埋め込みをつかい, $SL(n, \mathbb{R})$ 上で定義された関数である Eisenstein 級数を $K_{\mathbb{R}}^{(1)} := \{a \in K_{\mathbb{R}}^{\times}\ ;\ \det\lambda(a) = 1\}$ (すなわち K 上ノルム 1 の空間) の上の関数と以下の方法でみなすことができる．

$$E_{K,\mathfrak{b}}(\epsilon, \nu, a; f) = E(\epsilon, \nu, W'_{\mathfrak{b}}\lambda(a); f),\ a \in K_{\mathbb{R}}^{(1)}.$$

ここで, $\det W_{\mathfrak{b}} > 0$ となるように $\omega_1, \cdots, \omega_n$ をとり, $W'_{\mathfrak{b}} = (\det W_{\mathfrak{b}})^{-\frac{1}{n}}W_{\mathfrak{b}} \in SL(n, \mathbb{R})$ とおいた．

このように, $K_{\mathbb{R}}^{\times}$ 上の関数とみてやると, $SL(n, \mathbb{Z})$ による保型性は $O_K^{(1)} = \{\varepsilon \in \mathcal{O}_K^{\times}\ ;\ N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1\}$ 不変性に移る．

補題 2.4. Eisenstein 級数の $SL(n, \mathbb{Z})$ 保型性より, $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^{(1)}$ に対し,

$$E_{K,\mathfrak{b}}(a; f) = E_{K,\mathfrak{b}}(\varepsilon a; f)$$

成り立つ．

2.3 調和多項式と $K^\times$ の指標

調和多項式の空間は $SL(n,\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群 $SO(n,\mathbb{R})$ の既約表現の表現空間として実現されていた. 上で定めた埋め込み写像により $C_K = \lambda(K_{\mathbb{R}}^{(1)}) \cap SO(n,\mathbb{R})$ を考えれば, これはアーベルかつコンパクト群となり調和多項式の空間はさらに C_K 上の 1 次元表現, 即ち指標の空間に分解される. これにより $K^\times$ 上の指標を調和多項式より得ることができる.

$\gamma = (\delta_1,\cdots,\delta_{r_1},l_1,\cdots,l_{r_2}) \in \{0,1\}^{r_1} \times \mathbb{Z}^{r_2}$ に対し, C_K の既約表現の元 $f_\gamma \in H_d$ $(d = \sum_{i=1}^{r_1}\delta_i + \sum_{j=1}^{r_2}|l_j|)$ を以下のようにとってくる.

$$f_\gamma(x) = \prod_{i=1}^{r_1} x_i^{\delta_i} \prod_{j=1}^{r_2} c_{l_j}(x_{r_1+2j-1}, x_{r_1+2j}).$$

ここで,

$$c_l(x,y) = \begin{cases} (x-\sqrt{-1}y)^l & l \geq 0 \\ (x+\sqrt{-1}y)^{|l|} & l \leq 0. \end{cases}$$

とした.

補題 2.5. 上で定義した調和多項式 f_γ と, 以下のような $K^\times$ の指標 χ_γ

$$\chi_\gamma(a) = \prod_{i=1}^{r_1}\mathrm{sgn}(a^{(i)}) \prod_{j=1}^{r_2}\exp(\sqrt{-1}l_j\arg(a^{(r_1+j)})) \quad a \in K^\times$$

に対し, 以下が成り立つ.

$$f_\gamma(x\cdot\lambda(a)) = \chi_\gamma(a) f(x\cdot|\lambda(a)|).$$

ここで

$$|\lambda(a)| = \begin{pmatrix} |a^{(1)}| & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & |a^{r_1}| & & & \\ & & & |a^{(r_1+1)}|I_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & |a^{(r_1+r_2)}|I_2 \end{pmatrix}$$

とした.

2.4 主定理

以上の議論で Eisenstein 級数の $SL(n,\mathbb{Z})\backslash SL(n,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$ 上の解析が $K_{\mathbb{R}}^{(1)}$ 上に引き戻されたときに, どのように移るかをみてきた. 即ち, $SL(n,\mathbb{Z})$ 不変性は $\mathcal{O}_K^{(1)}$ 不変性に移り, $SO(n,\mathbb{R})$ の調和多項式への表現は $K^\times$ の指標を引き起こした. さて, $\mathcal{O}_K^{(1)}\backslash K_{\mathbb{R}}^{(1)}/\lambda^{-1}(C_K)$ の構造をもう少し見てみよう. Dirichlet の単数定理 (正確にはその証明のための補助定理であるが) より以下の同型を得る.

$$\begin{array}{cccc} u\colon & [0,1)^r & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_K^{(1)}\backslash K_{\mathbb{R}}^{(1)}/\lambda^{-1}(C_K) \\ & t=(t_1,\cdots,t_r) & \mapsto & (\prod_{i=1}^r|\varepsilon_i^{(1)}|^{t_i},\cdots,\prod_{i=1}^r|\varepsilon_i^{(r)}|^{t_i}). \end{array}$$

ここで ε_i $(i=1,\cdots,r)$ は基本単数の組である.

この写像 u は自然に $\mathbb{R}^r$ から $K_{\mathbb{R}}^{(1)}$ への写像に拡張されるので,

$$g(t) = E(\epsilon, \nu, W'_{\mathfrak{b}}\lambda(u(t)), f_\gamma)$$

とおくことにより $t \in \mathbb{R}^r$ 上の関数とみることができる.

補題 2.6. 上の記号の下で以下が成り立つ.

$$g(t) = g(t+a) \quad a \in \mathbb{Z}^r.$$

従って, $\mathbb{R}^r/\mathbb{Z}^r$ で Fourier 展開を考えることができ,

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^r} (g, e_m) e_m(t)$$

となる. ここで, $e_m(t) = \exp 2\pi\sqrt{-1}\langle m, t\rangle$, $\langle m, t\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積, Fourier 係数を $(g, e_m) = \int_{[0,1]^r} g(y)\overline{e_m(y)}\, dy$ とした.

このとき, この Fourier 係数 (g, e_m) に対し以下の主定理が成り立つ.

定理 2.7.

$$\pi^{-s}\Gamma(s+\frac{d}{2})(g, e_m) = \frac{1}{2^r n}\omega_K |d_K|^{\frac{s}{n}} R_K^{-1} \chi_{m,\gamma}(\mathfrak{b}) \zeta_\infty(\frac{2s}{n, \chi_{m,\gamma}}) \zeta_K(\frac{2s}{n}, A, \chi_{m,\gamma}).$$

ここで, Hecke 指標

$$\chi_{m,\gamma} \colon I = \{O_K \text{の分数イデアル全体の成す群}\} \longrightarrow \mathbb{C}^1$$

は単項イデアル (a) に対し,

$$\chi_{m,\gamma}((a)) = \prod_{i=1}^{r} (|a^{(i)}|^{-1} |N_{K/\mathbb{Q}}(a)|^{\frac{1}{n}})^{-2\pi\sqrt{-1}(m, r_i)} \chi_\gamma(a)$$

となるもので,

$$\begin{aligned}
\omega_k &\colon K \text{ 内の } 1 \text{ の冪根の数},\\
d_K &\colon K \text{ の判別式},\\
R_K &\colon K \text{ の単数基準},\\
r_i &\colon R_K \text{ よりきまる } \mathbb{R}^r \text{ の元 (ここでは残念ながら詳細は省く)},\\
A &\colon \mathfrak{b}^{-1} \text{ のイデアル類},\\
\zeta_K(s, A, \chi) &\colon \text{イデアル類 } A \text{ の部分 Dedekind ゼータ関数},\\
\zeta_\infty(s, A, \chi) &\colon \zeta_K(s, A, \chi) \text{ の } \Gamma \text{ 因子}
\end{aligned}$$

である.

注意 2.8. 上の定理で定めた Hecke 指標 $\chi_{m,\gamma}$ は一意ではないが, 定理は単項イデアルにおいて上の条件を満たす任意の指標について成り立つ.

また, (g, e_m) についてインデックス m が $\mathbb{R}^r$ を走れば, すべての Hecke 指標を再現できることに注意する.

謝辞

今回講演の機会を与えてくださった第 2 回福岡数論研究集会の主催者の先生方, 金子 昌信先生, 権 寧魯先生, 岸 康弘先生にここに感謝いたします.

参考文献

[1] Ash, A. and Friedberg, S., Hecke L-Functions and the Distribution of Totally Positive Integers. Canad. J. Math. 59 (2007), no. 4, 673-695.

[2] Harish-Chandra., Automorphic forms on semisimple Lie groups. Lecture Notes in Mathematics, No. 62 Springer-Verlag, Berlin-New York 1968 x+138 pp.

[3] Harder, G., Period integrals of cohomology classes which are represented by Eisenstein series. Automorphic forms, representation theory and arithmetic (Bombay, 1979), pp. 41–115, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., 10, Tata Inst. Fundamental Res., Bombay, 1981.

[4] Hecke, E., Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratsche Körper und die Klassenzahl relativ-Abelscher Körper. *Verhandl. der Naturrforschenden Gesell. i. basel* **28** (1917), 363-372; "Mathematische Werke", **10**, pp. 198-207. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen 1959, 2. Auflage, 1970.

[5] Helgason, S., Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Corrected reprint of the 1984 original. Mathematical Surveys and Monographs, 83. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[6] Hiroe, K. and Oda, T., Hecke-Siegel's pull-back formula for the Epstein zeta function with a harmonic polynomial, to appear in J. Number Theory.

[7] Langlands, R., On the functional equations satisfied by Eisenstein series. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. v+337 pp.

[8] Piatetski-Shapiro, I. and Rallis, S., L-functions of automorphic forms on simple classical groups. Modular forms (Durham, 1983), 251–261, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Horwood, Chichester, 1984.

[9] Siegel, C. L., Advanced analytic number theory. Second edition. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, 9. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980. v+268 pp.

[10] Yamamoto, S., Hecke's integral formula for relative quadratic extensions of algebraic number fields, to appear in Nagoya Math. J.