

Fourier expansion of Arakawa lifting

村瀬 篤 (京都産業大学) 成田 宏秋 (大阪市立大学)

1 導入

1.1

保型形式から整数論的に意義のある情報を取り出そうとすると、我々はそのフーリエ係数やL関数に注目するであろう。これは戦前戦後辺りのヘッケやジーゲルの研究により、保型形式が整数論の研究対象として本格的に意識されるようになって以来、続いている問題意識であると言えよう。一見すると直接関係がないように見えるこの2つの数論的不変量であるが、Waldspurger [W-1], Kohnen-Zagier [K-Z] は、この2つが実は密接に関連することがあるという公式を与えた。具体的には、まず半整数ウェイト $k + \frac{1}{2}$ の楕円尖点形式 f のフーリエ係数を $c(n)$ ($n > 0$) とする。次に、 f に志村対応により対応する、レベル1で整数ウェイト $2k$ の楕円尖点形式 g (但し正規化されたヘッケ同時固有形式であると仮定する) を与え、ルジャンドル記号が定める2次指標 $(\frac{D}{*})$ (D は2次体の基本判別式で $(-1)^k D > 0$) による捻り付きの g のL関数を $L(g, (\frac{D}{*}), *)$ とおく。すると次の公式が成り立つ。

$$\frac{|c(|D|)|^2}{\langle f, f \rangle} = \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{\frac{k}{2}-1} \frac{L(g, (\frac{D}{*}), k)}{\langle g, g \rangle}.$$

ここに $\langle f, f \rangle$ と $\langle g, g \rangle$ は f と g それぞれの Petersson 内積を表し、 $L(g, (\frac{D}{*}), k)$ はこのL関数の中心値 (つまり関数等式の中点での値) であることを注意する。この公式は、Waldspurger [W-1] が最初に、適当な比例定数倍の下に、これらのフーリエ係数とL関数の特殊値が関係することを示し、上の通りその比例定数を具体的に決めたのが Kohnen-Zagier [K-Z] である (但し [W-1] は、より一般的な状況を扱っている。そして現在では、比例定数の決定についてもレベル付きの場合で様々な結果が得られている)。

すると次の問題として、例えば正則ジーゲル保型形式のような多変数の保型形式に同様のことが期待できないかと、自然に考える。そこで Böcherer [B] は重さが k でレベル1である、次数2の正則ジーゲル保型形式について、それと同様のことが成り立つという予想をいくつかの根拠と共に与えた。その予想を述べるために、今述べた正則ジーゲル保型形式 F (ヘッケ同時固有的であると仮定) を以下の通りフーリエ展開付きで与える。

$$F(Z) = \sum_T C_T \exp(2\pi\sqrt{-1} \operatorname{Tr} TZ) \quad (Z \in \{X + \sqrt{-1}Y \in \operatorname{Sym}_2(\mathbb{C}) \mid Y : \text{正定値}\})$$

ここに T は次数2の正定値半整数 (対称) 行列を走り、 C_T はフーリエ係数を表す。このとき $-D$ を虚2次体の基本判別式とし、 $L_{\text{spin}}(F, (\frac{-D}{*}), *)$ を F に付随する2次指標 $(\frac{-D}{*})$ による捻り付きのスピンールL関数すると、Böcherer が予想した公式は以下のように与えられる。

$$\left| \sum_{\{T \mid \det(T) = \frac{D}{4}\} / \sim} \frac{C_T}{\epsilon(T)} \right|^2 = C_F D^{k-1} L_{\text{spin}}(F, \left(\frac{-D}{*}\right), k-1).$$

ここに $\sim$ は半整数行列の $SL_2(\mathbb{Z})$ -作用に関する同値類を表し, $\epsilon(T) := \#\{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t\gamma T \gamma = T\}$, C_F は F にのみ依存する定数である. そして, $k-1$ はこのスピノール関数の中心値を与えることを注意しておく.

以上のような背景の下に, 今回我々が得た結果 (定理 3.4.1) というのは, 「荒川リフト」という符号 $(1+, 1-)$ の四元数ユニタリー群 $GSp(1, 1)$ 上の保型形式で, 「無限素点において四元数離散系列表現 (Gross-Wallach [G-W] 参照) を生成する」という表現論的特徴付けを持つものについての, フーリエ係数の明示公式である (「荒川リフト」という名称はもちろん, 荒川恒男氏によって最初に構成されたものであることに由来する). 荒川リフトは楕円尖点形式と定符号四元数環上の保型形式の組からの「テータリフト」により構成される. 我々が得た公式は, そのフーリエ係数が, 明示的に与えられる比例定数倍の下, リフトされる 2 つの保型形式の「トーラス積分」の積と一致するというものである. このトーラス積分の 2 乗ノルムは Waldspurger [W-2, Proposition 7] により, 虚 2 次体のヘッケ指標による捻り付きのある保型 L 関数の中心値と, 適当な比例定数倍の下, 一致することが知られている. つまり, 我々の公式により, 荒川リフトのフーリエ係数の 2 乗ノルムは, 適当な比例定数倍の下に, リフトされる 2 つの保型形式に付随する保型 L 関数の中心値の積となり, これは $GSp(1, 1)$ 上の保型形式について Böcherer 予想の類似を与えていると言える. 実際, Furusawa-Shalika [F-S] は, 次数 2 のシンプレクティック群 $GSp(2)$ 及びその内型上の保型形式について (ジゲル保型形式は $GSp(2)$ 上の保型形式であることに注意せよ), Böcherer 予想が一般的に成り立つという期待を, 彼等が定式化した「(予想的) 相対跡公式」を根拠に述べている. 事実, $GSp(1, 1)$ は $GSp(2)$ の内型の一つである.

この報告書では, フーリエ係数の公式に加えて, その応用として, 荒川リフトの非消滅の例を与える. より詳しくは, ある特定の設定の下, 楕円保型形式と定符号四元数環上の保型形式の組で, それらのトーラス積分が同時に消えない例を与えることにより, 非消滅荒川リフトの存在性を示す.

1.2 記号

有理数体 $\mathbb{Q}$ の各素点 $v \leq \infty$ に対して, $|\cdot|_v$ は $v = p$ が有限素点のときは p -進付値を表し, v が無限素点のときは通常の絶対値を表す. そして有限素点 $v = p$ での素元を π_p と記す. 有理数体のアデール環を $\mathbb{A}$ とし, $\mathbb{A}_f$ は有限アデールの集合とする. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 $\mathcal{G}$ について, その $\mathbb{Q}$ -代数 R に値を持つ点の成す群を $\mathcal{G}_R$ と記す. 特に $R = \mathbb{Q}_v$ のときは単に $\mathcal{G}_R = \mathcal{G}_v$ と記す. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環 B について, $B \ni b \mapsto \bar{b} \in B$ を B の主対合とし, $\text{tr}(b) := b + \bar{b}$ 及び $n(b) := b\bar{b}$ ($b \in B$) を, それぞれ B の被約トレースと被約ノルムとする.

2 荒川リフト

2.1

まず, $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 $G = GSp(1, 1)$ を

$$G_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in M_2(B) \mid {}^t \bar{g} Q g = \nu(g) Q, \nu(g) \in \mathbb{Q}^\times \right\} \quad (Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

により定義する. 定符号四元数環 B の判別式 (つまり $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ が斜体となる素数 p の積) を d_B と記し, d_B の任意の約数 D を固定する. そして, 以下では B の極大整環 $\mathfrak{O}$ を一つ固定する. 更に $\mathbb{Q}$ 上の 2 つの代数群 H と H' を以下で定義する.

$$H_{\mathbb{Q}} = GL_2(\mathbb{Q}), \quad H'_{\mathbb{Q}} = B^{\times}.$$

群 G, H について以下の座標を導入する.

$$n_G(x) := \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{Q}} \ (x \in B^{-} := \{x \in B \mid \text{tr}(x) = 0\}),$$

$$d_H(a, a') := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in H_{\mathbb{Q}} \ (a, a' \in \mathbb{Q}^{\times}), \quad n_H(b) := \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_{\mathbb{Q}} \ (b \in \mathbb{Q}).$$

レベル D の合同部分群 $\Gamma_0(D)$ に関する重さ κ の楕円尖点形式の空間を $S_{\kappa}(D)$ とする (以下では, $H_{\mathbb{A}} = GL_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式と見なす). 更に $H'_{\mathbb{A}}$ 上の保型形式で $\mathbb{H}^1 \simeq SU(2)$ ($\mathbb{H} := B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$) の κ 回対称テンソル表現 $(\sigma_{\kappa}, V_{\kappa})$ を重さに持ち, 右 $\prod_{p < \infty} \mathfrak{O}_p^{\times}$ 不変なものの成す空間を $\mathcal{A}_{\kappa}$ と記す (いずれの保型形式も中心的指標は自明とする). このとき $\kappa > 4$ に対しテータリフト

$$S_{\kappa}(D) \times \mathcal{A}_{\kappa} \ni (f, f') \mapsto \int_{(\mathbb{R}_{+}^{\times})^2 (H \times H')_{\mathbb{Q}} \backslash (H \times H')_{\mathbb{A}}} \overline{f(h)} \Theta(g, h, h') f'(h') dh dh' \quad (g \in G_{\mathbb{A}})$$

を荒川リフトと呼ぶ. 以下これを, $\mathcal{L}(f, f')(g)$ で記す. ここに $\Theta(g, h, h')$ は $G_{\mathbb{A}} \times H_{\mathbb{A}} \times H'_{\mathbb{A}}$ のメタプレクティック表現を用いて定義されるある $\text{End}(V_{\kappa})$ -値のテータ級数を表す (次の部分節で詳しく説明する). このリフトは, (f, f') がヘッケ同時固有形式ならば, それ自身もヘッケ同時固有形式であることが知られている ([M-N-1] 参照).

2.2

ここで, $\Theta(g, h, h')$ について詳しく説明する. そのためにまず, $\mathbb{Q}$ の各素点 $v \leq \infty$ について, 局所体 $\mathbb{Q}_v$ 上のメタプレクティック表現 r_v を定義する. その表現空間 $\mathbb{V}_v$ は次のように与えられる. 最初に $v < \infty$ のときは $\mathbb{V}_v$ を, $B_v^2 \times \mathbb{Q}_v^{\times}$ 上のコンパクト台を持つ局所定数関数の成す空間とする. そして $v = \infty$ のときは, まず $\mathcal{S}_{\infty}$ を, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^{\times}$ 上平滑な関数 φ で, 各固定した $t \in \mathbb{R}^{\times}$ に対して,

$$\mathbb{H}^2 \ni X \mapsto \varphi(X, t)$$

が $\mathbb{H}^2$ 上の急減少滑らかとなるもの全体とする. その上で $\mathbb{V}_{\infty} := \mathcal{S}_{\infty} \otimes \text{End}(V_{\kappa})$ と定義する.

補題 2.2.1. 各素点 v に対し, 以下を満たす $G_v \times H_v \times H'_v$ の $\mathbb{V}_v$ 上の表現 r_v が存在する.

$$r_v(g, 1, 1) \varphi(X, t) = |\nu(g)|_v^{-3/2} \varphi(g^{-1}X, \nu(g)t) \quad (g \in G_v),$$

$$r_v(1, n_H(b), 1) \varphi(X, t) = \psi\left(\frac{bt}{2} \text{tr}(X^* Q X)\right) \varphi(X, t) \quad (b \in \mathbb{Q}_v^{\times}),$$

$$r_v(1, d_H(a, a'), 1) \varphi(X, t) = |a|_v^{7/2} |a'|_v^{-\frac{1}{2}} \varphi(aX, (aa')^{-1}t) \quad (a, a' \in \mathbb{Q}_v^{\times}),$$

$$r_v\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1\right) \varphi(X, t) = |t|_v^4 \int_{B_v^2} \psi(t \text{tr}(Y^* Q X)) \varphi(Y, t) d_Q Y,$$

$$r_v(1, 1, z) \varphi(X, t) = |n(z)|_v^{3/2} \varphi(Xz, n(z)^{-1}t) \quad (z \in H'_v).$$

ここに $d_Q Y$ はペアリング

$$B_v^{\oplus 2} \times B^{\oplus 2} \ni (Y, Y') \mapsto \psi_v(\text{tr}(Y^* Q Y'))$$

に関して自己双対的な B_v^2 上の測度である.

ここで, B_v^2 の極大格子 L_v を

$$L_v := \begin{cases} \mathfrak{D}_v^2 & (v \nmid d_B \text{ or } v \mid D), \\ \mathfrak{D}_v \oplus \mathfrak{P}_v^{-1} & (v \mid \frac{d_B}{D}) \end{cases}$$

と取る. 上記で $\mathfrak{P}_v$ は $\mathfrak{D}_v$ の極大イデアルを表す. そして $\varphi_{0,v} := \text{char}(L_v \times \mathbb{Z}_v^\times)$ ($L_v \times \mathbb{Z}_v$ に関する特性関数) とおく. すると $G_{\mathbb{A}} \times H_{\mathbb{A}} \times H'_{\mathbb{A}}$ の大域的なメタプレクティク表現 $r := \otimes_{v \leq \infty} r_v$ が, $\mathbb{V}_v$ の $\{\varphi_{0,v}\}_{v < \infty}$ に関する制限直積 $\mathbb{V} := \otimes'_{v \leq \infty} \mathbb{V}_v$ 上で定義される.

更に $\varphi_{0,\infty} \in \mathbb{V}_{\infty}$ を

$$\varphi_{0,\infty}(X, t) := \begin{cases} \sigma_{\kappa}(X_1 + X_2) \exp(-\pi t \text{tr}({}^t \bar{X} X)) & (t > 0), \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

とおく. ここに $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2$ である. このとき $\varphi_0 := \otimes_{v \leq \infty} \varphi_{0,v} \in \mathbb{V}$ とおくと, $\Theta(g, h, h')$ は以下で与えられる.

$$\Theta(g, h, h') := \sum_{(X,t) \in B^2 \oplus \mathbb{Q}^\times} r(g, h, h') \varphi_0(X, t).$$

このテータ級数は左 $G_{\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{Q}} \times H'_{\mathbb{Q}}$ 不変で, H に関しては重さ κ の, H' に関しては重さ σ_{κ}^{-1} の保型形式となっている.

2.3

ここでは, 荒川リフトの保型性や無限素点での表現論的特徴づけについて述べる. 実単純リー群

$$G_{\infty}^1 := \{g \in G_{\infty} \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

を導入し, $\mathfrak{g}_{\infty}$ でそのリー環を表す. そして $K_{\infty} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \pm b \in \mathbb{H}^1 \right\}$ は G_{∞}^1 の極大コンパクト群を成す. 更に $(\tau_{\kappa}, V_{\kappa})$ を以下で定義される K_{∞} の既約有限次元表現とする.

$$K_{\infty} \ni \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto \sigma_{\kappa}(a + b) \in \text{End}(V_{\kappa}).$$

各有限素点 $v = p$ で, 極大コンパクト部分群 $K_p := \{k_p \in G_p \mid k_p L_p = L_p\}$ を与え

$$K_f := \prod_{p < \infty} K_p$$

とおく. 更に, $Z_{\mathbb{A}}$ を $G_{\mathbb{A}}$ の中心とする.

命題 2.3.1. $\kappa > 4$ と仮定せよ. このとき荒川リフト $\mathcal{L}(f, f')$ は重さ (τ_κ, V_κ) の保型形式である. より詳しくは, 任意の固定した $g \in G_{\mathbb{A}}$ に対して

$$\mathcal{L}(f, f')(z\gamma g k_f k_\infty) = \tau_\kappa(k_\infty)^{-1} \mathcal{L}(f, f')(g) \quad ((z, \gamma, k_f, k_\infty) \in Z_{\mathbb{A}} \times G_{\mathbb{Q}} \times K_f \times K_\infty)$$

が成り立つ. そして更に $\mathcal{L}(f, f')$ は, 無限素点において, 四元数離散系列表現を生成する保型形式である. つまり, 任意の固定した $g' \in G_{\mathbb{A}}$ に対して, $\langle \mathcal{L}(f, f')(g' g_\infty) \mid g_\infty \in G_\infty^1 \rangle$ は G_∞^1 の四元数離散系列表現と $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ -加群として同型である.

3 主結果

この節では, 主定理を述べその証明の概略を与えることを目標とするが, そのためにはいくつか準備が必要なので, 以下の通り 5 つの部分節を設ける. まず第 3.1 節では, $GS(1, 1)$ 上の保型形式のフーリエ展開の一般形を与え, フーリエ係数の定義を与える. 第 3.2 節では主定理を述べるために必要な仮定を与え, 第 3.3 節では, 主に純四元数 $B^- \setminus \{0\} \ni \xi$ が生成する虚 2 次体及びその上のヘッケ指標に関する記号を用意し, 主定理の準備的な命題 (命題 3.3.1) を与える. 第 3.4 節で, 更に必要な記号を用意した上で主定理を述べる. そして最後の第 3.5 節で, 主定理の証明の概略を説明する.

3.1

一般に $G_{\mathbb{A}}$ 上の保型形式 F は, その $G_{\mathbb{Q}}$ の極大ユニポテント部分群

$$\{n_G(x) \mid x \in B^-\}, \quad (B^- := \{b \in B \mid \bar{b} + b = 0\})$$

に関する左不変性から, 以下のフーリエ展開を持つことが分かる.

$$F(g) = \sum_{\xi \in B^-} F_\xi(g), \quad \int_{B^- \setminus B_{\mathbb{A}}^-} F(n_G(x)g) \psi(-\text{tr}(\xi x)) dx.$$

ここに ψ は $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$ の標準的加法指標を表す. そしてこのフーリエ展開は以下のように細分できる.

$$F(g) = \sum_{\xi \in B^-} \sum_{\chi \in X_\xi} F_\xi^\chi(g), \quad F_\xi^\chi(g) := \int_{\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}(\xi)^\times \setminus \mathbb{Q}(\xi)_{\mathbb{A}}^\times} F_\xi((s1_2)g) \chi(s)^{-1} ds.$$

ここに X_ξ は $\mathbb{Q}_{\mathbb{A}}^\times \mathbb{Q}(\xi)^\times \setminus \mathbb{Q}(\xi)_{\mathbb{A}}^\times$ 上のヘッケ指標 (無限位数も許す) の集合を表す. 我々の関心は, $F = \mathcal{L}(f, f')$ のとき, 後者のフーリエ展開のフーリエ係数 F_ξ^χ を調べることである.

3.2

この第 3 節の残りでは, $(f, f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ をヘッケ同時固有形式とする. 主結果を与えるためには以下の 2 つの仮定, (1) と (2) を必要とする.

(1) まず一つ目は, f と f' それぞれの「Atkin-Lehler 対合」に関する符号は等しいとする. つまり, 各 $p \mid D$ に対して, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}$ の f への作用によって生じる符号を ϵ_p とし, B_p の素元 Π_p の f' への作用によって生じる符号を ϵ'_p とすると

$$\epsilon_p = \epsilon'_p$$

が成り立っているとする. さもないと, $\mathcal{L}(f, f') \equiv 0$ となる.

(2) もう一つの仮定として, $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ が原始的とする. つまり, 各素数 p に対して

$$\mathfrak{a}_p := \begin{cases} \mathfrak{D}_p & (p \nmid d_B \text{ または } p \mid D), \\ \mathfrak{P}_p & (p \mid \frac{d_B}{D}) \end{cases}$$

とおくと,

$$\xi \in \mathfrak{a}_p \setminus p\mathfrak{a}_p$$

が成立しているとする. これは一般に, $G_{\mathbb{A}}$ 上の保型形式 F のフーリエ係数 F_{ξ} が

$$F_{\xi}(g) = F_{\xi}\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = F_{t\xi}(g) \quad (t \in \mathbb{Q}^{\times})$$

を満たしているので, ξ が原始的である場合に帰着されてしまうことによる.

3.3

次に, いくつか必要な記号を用意する. 各 $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ に対して $E = E_{\xi} = \mathbb{Q}(\xi)$ は虚 2 次体と同型である. 虚 2 次体 E の無限素点での完備化 E_{∞} は写像

$$\delta_{\xi} : E_{\infty} \ni x + y\xi \mapsto x + y\sqrt{-n(\xi)} \in \mathbb{C} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

により複素数体 $\mathbb{C}$ と同一視される. この虚 2 次体 E のヘッケ指標 $\chi = \prod_{v \leq \infty} \chi_v$ に対し, $w_{\infty}(\chi) \in \mathbb{Z}$ を

$$\chi_{\infty}(u) = (\delta_{\xi}(u)/|\delta_{\xi}(u)|)^{w_{\infty}(\chi)} \quad (u \in E_{\infty})$$

で定める. そして各有限素点 $v = p < \infty$ に対し $i_p(\chi)$ を χ の p での導手とする. すると次の命題が言える.

命題 3.3.1. 荒川リフトのフーリエ係数 $\mathcal{L}(f, f')_{\xi}^{\chi}$ は, 以下の 2 条件が成立しているとき以外は消える.

$$i_p(\chi) = 0 \quad \forall p \mid d_B, \quad w_{\infty}(\chi) = -\kappa.$$

3.4

以下 χ について, 上述の命題の条件を仮定する. 主結果を述べるために更に記号を用意する. まず ξ が生成する虚 2 次体 E の判別式を d_{ξ} とする. そして各素数 p に対して,

$$\mu_p := \frac{\text{ord}_p(2\xi)^2 - \text{ord}_p(d_{\xi})}{2}$$

とおくとこれは整数となる. 素数 p が E で分裂するとき, 同一視

$$E_p = E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$$

を固定し, 2 つある素元 $(1, \pi_p)$ と $(\pi_p, 1)$ をそれぞれ, $\Pi_{1,p}$, $\Pi_{2,p}$ と記す. 各 $\Pi_{i,p}$ ($i = 1, 2$) に対して, 以下を満たす $c_{i,p} \in \mathbb{Z}_p$ ($i = 1, 2$) を選ぶ.

$$\theta_p + c_{i,p} \in \Pi_{i,p} \mathfrak{D}_{E,p}^{\times} \quad (\theta_p = \pi_p^{-\mu_p} (\xi - \frac{a}{2})), \quad c_{1,p} + c_{2,p} = \begin{cases} d_{\xi} & (d_{\xi} \text{ が奇数}), \\ \frac{1}{2}d_{\xi} & (d_{\xi} \text{ が偶数}). \end{cases}$$

判別式 d_B を割る素数 p について, B_p の素元を $\Pi_{B,p}$ と記す.

ここで $\gamma_0 = (\gamma_{0,p})_{p \leq \infty} \in H_{\mathbb{A}}$ と $\gamma'_0 = (\gamma'_{0,p})_{p < \infty} \in H'_{\mathbb{A}_f}$ を以下の通りに与える.

$$\gamma_{0,p} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p + i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid D), \\ 1_2 & (p \mid D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (p \mid D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で分岐}), \\ \begin{pmatrix} 1 & c_{1,p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (p \mid D \text{ で } (*)_p \text{ が成立}), \\ 1_2 & (p \mid D \text{ で } (**)_p \text{ が成立}), \\ n_H(a/2)d_H(N(\xi)^{1/4}) & (p = \infty), \end{cases}$$

$$\gamma'_{0,p} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p + i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid d_B), \\ \Pi_{B,p}^{-1} & (p \mid d_B). \end{cases}$$

ここに

$$(*)_p \Leftrightarrow p \text{ が } E \text{ で分裂し } \epsilon_p + \chi_p(\Pi_{2,p}) \neq 0, \\ (**)_p \Leftrightarrow p \text{ が } E \text{ で分裂し } \epsilon_p + \chi_p(\Pi_{2,p}) = 0.$$

更に以下の通りの局所定数を導入する.

$$C_p(f, \xi, \chi) := \begin{cases} p^{2\mu_p - i_p(\chi)}(1 - \delta(i_p(\chi) > 0)e_p(E)p^{-1}) & (p \nmid d_B), \\ 1 & (p \mid \frac{d_B}{D}), \\ 2\epsilon_p & (p \mid D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ (p+1)^{-1} & (p \mid D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で分岐}), \\ \frac{\epsilon_p(2\overline{\lambda_p} - \chi_p(\Pi_{1,p}) - \chi_p(\Pi_{2,p}) + 2\epsilon_p)}{(p+1)(\epsilon_p + \chi_p(\Pi_{2,p}))} & (p \mid D \text{ で } (*)_p \text{ が成立}), \\ \frac{2\epsilon_p(p-1)}{p+1} & (p \mid D \text{ で } (**)_p \text{ が成立}). \end{cases}$$

ここに

$$e_p(E) = \begin{cases} -1 & (p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ 0 & (p \text{ は } E \text{ で分岐}), \\ 1 & (p \text{ は } E \text{ で分裂}). \end{cases}$$

そして $(f, f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ に対して $\chi \in X_\xi$ に関する「トーラス積分」([W-2] 参照) を導入する. そのために ξ に対して, a, b を以下の通りに定める.

$$a := \begin{cases} 2\sqrt{-n(\xi)}\sqrt{d_\xi} & (d_\xi \text{ が奇数}), \\ \sqrt{-n(\xi)}\sqrt{d_\xi} & (d_\xi \text{ が偶数}), \end{cases} \quad b := \xi^2 - \frac{a^2}{4}.$$

これにより埋め込み写像 $\iota_\xi : E^\times \hookrightarrow GL_2(\mathbb{Q})$ を

$$\iota_\xi(x + y\xi) = x \cdot 1_2 + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

により定義する. するとトーラス積分は以下で定義される.

$$P_\chi(f; h) := \int_{\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}(\xi)^\times \setminus \mathbb{Q}(\xi)_\mathbb{A}} f(\iota_\xi(s)h) \chi(s)^{-1} ds, \quad P_\chi(f'; h') := \int_{\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}(\xi)^\times \setminus \mathbb{Q}(\xi)_\mathbb{A}} f(sh') \chi(s)^{-1} ds,$$

$$((h, h') \in GL_2(\mathbb{A}) \times B_\mathbb{A}^\times).$$

以上の準備の下, 主結果が以下の通りに述べられる.

定理 3.4.1. (1) $\xi = 0$ のとき, $\mathcal{L}(f, f')_\xi = 0$.

(2) $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ とせよ. そしてヘッケ指標 χ は, 命題 3.3.1 の条件を満たしているとし, (f, f') は第 3.2 節の仮定 (1), (2) を満たしているとし. このとき以下の公式を得る.

$$\mathcal{L}(f, f')_\xi^\chi(g_0 d_G(\sqrt{\eta_\infty}))$$

$$= 2^{\kappa-1} N(\xi)^{\kappa/4} \mathbf{h}(E_\xi)^{-1} \cdot \left(\prod_{p < \infty} C_p(f, \xi, \chi) \right) \eta_\infty^{\kappa/2+1} \exp(-4\pi\sqrt{N(\xi)\eta_\infty}) \overline{P_\chi(f; \gamma_0)} P_\chi(f'; \gamma'_0).$$

ここに $\eta_\infty \in \mathbb{R}_+^\times$ であり, $g_0 = (g_{0,p})_{p < \infty} \in G_{\mathbb{A}_f}$ は

$$g_{0,p} := \begin{cases} \text{diag}(p^{i_p(\chi)-\mu_p}, p^{2(i_p(\chi)-\mu_p)}, 1, p^{i_p(\chi)-\mu_p}) & (p \nmid d_B), \\ 1_2 & (p \mid d_B). \end{cases}$$

注意 3.4.2. このフーリエ係数 $\mathcal{L}(f, f')_\xi^\chi$ は, 菅野 [Su, Proposition 2-5] により, $g_0 d_G(\sqrt{\eta_\infty})$ の値で本質的に決まってしまうことが分かる.

3.5 主結果の証明の概略

以下記号の簡略化のため, $F := \mathcal{L}(f, f')$ とおく. まず, 各素点 v での部分フーリエ変換 $\mathcal{I}_v : \mathbb{V}_v \rightarrow \mathbb{V}_v$ を

$$\mathcal{I}_v \varphi \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, t \right) := \int_{B_v} \psi_v(-t \text{tr}(\overline{Y} X_1)) \varphi \left(\begin{pmatrix} Y \\ X_2 \end{pmatrix}, t \right) dY \quad (\varphi \in \mathbb{V}_v, X_1, X_2 \in B_v, t \in \mathbb{Q}_v^\times)$$

により定義する. ここに dY は B_v の測度で, ペアリング $B_v \times B_v \ni (X, Y) \mapsto \psi_v(\text{tr}(\overline{X}Y))$ に関して自己双対的であるとする. そして $\mathcal{I} := \otimes_{v \leq \infty} \mathcal{I}_v \in \text{End}(\mathbb{V})$ とおく. このときポアソンの和公式より, テータ級数 $\Theta(g, h, h')$ は

$$\Theta(g, h, h') = \sum_{(X, t) \in B^2 \times \mathbb{Q}^\times} (\mathcal{I} \circ r(g, h, h') \varphi_0)(X, t)$$

となる. すると以下が形式的に確かめられる.

補題 3.5.1. (1)

$$\Theta(n_G(x)g, h, h') = \sum_{\substack{tX=t(X_1, X_2) \in B^2, \\ t \in \mathbb{Q}^\times}} \psi(tX_1 \bar{X}_2 x) (\mathcal{I} \circ r(g, g, h') \varphi_0)(X, t).$$

(2)

$$F_\xi(g) = \int_{(\mathbb{R}_+^\times)^2 (H \times H')_\mathbb{Q} \backslash (H \times H')_\mathbb{A}} \overline{f(h)} \left(\sum_{(X, t) \in L_\xi} (\mathcal{I} \circ r(g, h, h') \varphi)(X, t) \right) f'(h') dh' dh.$$

ここに

$$L_\xi := \left\{ \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, t \right) \in B^2 \times \mathbb{Q}^\times \mid tX_1 \bar{X}_2 - \overline{tX_1 \bar{X}_2} = 2\xi \right\}.$$

この補題の (2) の L_ξ には $H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q}$ が

$$(h, h') \cdot (X, t) = ((\det h)^{-1} h X h'^{-1}, \det(h) n(h') t) \quad ((h, h') \in H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q})$$

により作用する. これにより, L_ξ は以下の $H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q}$ -軌道分解を持つ.

補題 3.5.2. (1) まず $\xi = 0$ とせよ. そして $L''_0 = \{(t(0, 0), t) \mid t \in \mathbb{Q}^\times\}$, $L'_0 = L_0 \setminus L''_0$ とおき, $l'_0 = (t(1, 0), 1) \in L'_0$, $l''_0 = (t(0, 0), 1) \in L''_0$ とおく. このとき L'_0 と L''_0 は $H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q}$ -等質空間で, l'_0 と l''_0 の $H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q}$ -作用に関する固定部分群は以下で与えられる.

$$S'_0 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a^{-1} \right) \mid a \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$S''_0 = \{(h, h') \in H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q} \mid \det(h) n(h') = 1\}.$$

つまり

$$L_0 = L'_0 \sqcup L''_0, \quad L'_0 \simeq S'_0 \backslash (H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q}), \quad L''_0 \simeq S''_0 \backslash (H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q})$$

である.

(2) 次に $\xi \neq 0$ とせよ. このとき L_ξ は $H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q}$ -等質空間になる. より具体的には,

$$l_0 := \left(\begin{pmatrix} \xi + a/2 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \in L_\xi$$

とおくと, その固定部分群が

$$\mathcal{S}(\xi)_\mathbb{Q} := \{(\iota_\xi(s), \bar{s}^{-1}) \mid s \in E_\xi^\times\}$$

となり

$$L_\xi \simeq \mathcal{S}(\xi)_\mathbb{Q} \backslash (H_\mathbb{Q} \times H'_\mathbb{Q})$$

が成り立つ.

この 2 つの補題により, 主定理の最初の主張, 即ち F のフーリエ展開の定数項が 0 であることが証明できる. 実際 $\xi = 0$ のとき, 補題 3.5.1 の (2) の F_ξ の積分公式への L'_0 の寄与の計算は

$$\int_{\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}} f(n_H(x)h) dx$$

に帰着され、これは f が尖点形式であるから 0 である。そして L_0'' の寄与についても、以下の積分に帰着されて 0 であることが分かる。

$$\int_{\mathbb{R}_+^\times H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} f(h) dh = 0.$$

二つ目の主張については、上の 2 つの補題により F_ξ^χ が以下の積分表示を持つことが分かる。

補題 3.5.3.

$$F_\xi^\chi(g) = \mathbf{h}(E_\xi)^{-1} \int_{(\mathbb{R}_+^\times)^2 S(\xi)_\mathbb{A} \backslash (H \times H')_\mathbb{A}} \Phi_\xi(g, h, h') \overline{P_\chi(f; h)} P'_\chi(f'; h') dh dh'.$$

ここに

$$\Phi_\xi(g, h, h') = (\mathcal{I} \circ r(g, h, h') \varphi_0)(l_0)$$

であり、 $\mathbf{h}(E_\xi)$ は E_ξ の類数を表す。

この補題から、主定理の公式まで到達するには、トーラス積分 $P_\chi(f; h)$ 及び $P'_\chi(f'; h')$ が、各素点で局所体上のある種の球関数 ([W-2, III, 1] 参照) になっていることに注目するのがポイントとなる。もし各素点で、その球関数の重複度が 1 であることが証明されたとすると、上記の補題の積分は以下の形になると期待できる。

$$C_{f, f', \chi}(g) \overline{P_\chi(f; h_0)} P'_\chi(f'; h'_0).$$

ここに $(h_0, h'_0) = (\prod_{v \leq \infty} h_{0,v}, \prod_{v \leq \infty} h'_{0,v}) \in H_\mathbb{A} \times H'_\mathbb{A}$ は球関数の初期値を与える元である。そして定数因子 $C_{f, f', \chi}$ は $\prod_{v \leq \infty} C_{f, f', \chi, v}$ と分解し、各素点 v での H_v 及び H'_v 上の球関数をそれぞれ w_v, w'_v として $w_v(h_{0,v}) = w'_v(h'_{0,v}) = 1$ と正規化しておく、

$$C_{f, f', \chi, v}(g_v) = \int_{S(\xi)_v \backslash H_v \times H'_v} \Phi_{\xi, v}(g_v, h_v, h'_v) \overline{w_v(h_v)} w'_v(h'_v) dh_v dh'_v$$

で与えられる。ここに $\Phi_{\xi, v}(g_v, h_v, h'_v) = (\mathcal{I}_v \circ r_v(g_v, h_v, h'_v) \varphi_{0, v})(l_0)$ であり、無限素点のところでは、積分域は $(\mathbb{R}_+^\times)^2 S(\xi)_\infty \backslash H_\infty \times H'_\infty$ となる。

結論から言うと、この期待は基本的に正しいことになる。第 3.4 節で与えた (γ_0, γ'_0) は他ならぬ (h_0, h'_0) に相当し、主定理の公式の定数因子 $C_p(f, \xi, \chi)$ は上の局所積分の計算により求まる。厳密には第 3.4 節にある「 $p|D$ で $(**)p$ が成立」という素点 $v = p$ では、球関数の重複度が高々 2 ということまでしか証明できないという障害が生じる。ところが、この例外的素点では、ある特殊な事情により、結局球関数の重複度 1 性が言えなくてもこの定数因子は計算できてしまう。

4 応用 (非消滅リフトの存在性)

4.1

主定理の応用として非消滅リフトの例を与える。そのために四元数環 B を $B = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}k$ ($i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji = k$), 極大整環を $\mathfrak{O} = \mathbb{Z} \frac{1+i+j+k}{2} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k$ (Hurwitz order) と取る。このとき $d_B = 2$ なので $D = 1$ または 2 である。原始的 ξ として $\frac{i}{2}$ を選び、 χ として全ての有限素点で不分岐な指標を取る。このとき以下が成り立つ。

命題 4.1.1. $\kappa \geq 12$, $4|\kappa$ という条件の下で

$$P_\chi(f; \gamma_0)P_\chi(f'; \gamma'_0) \neq 0$$

なるヘッケ同時固有形式 $(f, f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ が存在する.

この命題は, 第 3.1 節のフーリエ展開により, 直ちに次の定理を意味する.

定理 4.1.2. 正の整数 κ は命題のとおりとし, B と $\mathfrak{D}$ を上記のように取る. このとき各 κ に対し, ヘッケ同時固有形式 $(f, f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ で荒川リフト $\mathcal{L}(f, f')$ を非消滅にするものが存在する.

4.2

命題の証明の概略について説明する. まず κ に関する条件

$$\kappa \geq 12, 4|\kappa$$

というのは, $S_\kappa(1) \neq \{0\}$, $\mathcal{A}_\kappa \neq \{0\}$ という要請から来るものである. 前者は楕円尖点形式についてよく知られた事実であり, 後者は Eichler の Brandt 行列の跡公式 ([E, Theorem 5]) により保証される. 両方の空間はヘッケ同時固有基底を持つので, 示せばよいことは $P_\chi(f, \gamma_0) \neq 0$, $P'_\chi(f', \gamma'_0) \neq 0$ を満たす (必ずしもヘッケ同時固有形式でなくてもよい) $(f, f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ の存在である. まず f についてであるが, Δ を (重さ 12 の尖点形式である) ラマヌジャンのデルタ関数とし, E_4 を重さ 4 でレベル 1 のアイゼンシュタイン級数とすると, $D = 1$ のときは

$$f = \begin{cases} \Delta^{\frac{\kappa}{12}} & (\kappa \equiv 0 \pmod{12}), \\ \Delta^{\frac{\kappa-4}{12}} E_4 & (\kappa \equiv 4 \pmod{12}), \\ \Delta^{\frac{\kappa-8}{12}} E_4^2 & (\kappa \equiv 8 \pmod{12}) \end{cases}$$

と取る. $D = 2$ のときは, これらのレベル持ち上げを考えればよい. 一方, f' の存在性に関しては, $B^\times$ の類数が 1 であることから,

$$\mathcal{A}_\kappa \simeq V_\kappa^{\mathfrak{D}^\times} := \{v \in V_\kappa \mid \sigma(u)v = v, \forall u \in \mathfrak{D}^\times\}$$

となることに注意すると, 結局, 以下を満たす $v \in V_\kappa^{\mathfrak{D}^\times}$ の存在性に帰着される.

$$\langle v, v_\kappa \rangle \neq 0.$$

ここに, v_κ は V_κ の最高ウェイトベクトルで, $\langle *, * \rangle$ は V_κ とその双対空間との標準的ペアリングである. このような v としては

$$\sum_{u \in \mathfrak{D}^\times} \sigma_\kappa(u) v_\kappa$$

が取れる. よって命題が示され, 定理が証明される.

参考文献

- [B] S. Böcherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maass, Math. Göttingensis Heft 68, (1986).
- [E] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators, in Modular functions of one variable I, Lecture Note in Math. vol.320, (1972), 75–151.
- [F-S] M. Furusawa and J. Shalika, On central critical values of the degree four L -functions for $GS\!p(4)$: The fundamental lemma, Mem. Amer. Math. Soc., vol.164, No.782 (2003).
- [G-W] B. Gross and N. Wallach, On quaternionic discrete series representations, and their continuations, J. Reine. Angew. Math., 481 (1996), 73–123.
- [K-Z] W. Kohnen and D. Zagier, Values of L -series of modular forms at the center of the critical strip, Invent. Math., 64 (1981), 175–198.
- [M-N-1] A. Murase and H. Narita, Commutation relations of Hecke operators for Arakawa lifting, to appear in Tohoku Mathematical Journal.
- [M-N-2] A. Murase and H. Narita, Fourier expansion of Arakawa lifting, preprint (2007).
- [Su] T. Sugano, On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 31 (1985), 521–568.
- [W-1] J. L. Waldspurger, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, J. Math. Pures Appl., 60 (1981), 375–484.
- [W-2] J. L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, Compositio Math., 54 (1985), 173–242.