



小数・分数の指導

愛知教育大学 佐々木 徹郎

○小数と分数はどこが違うのか？

○どうして2つあるのか？

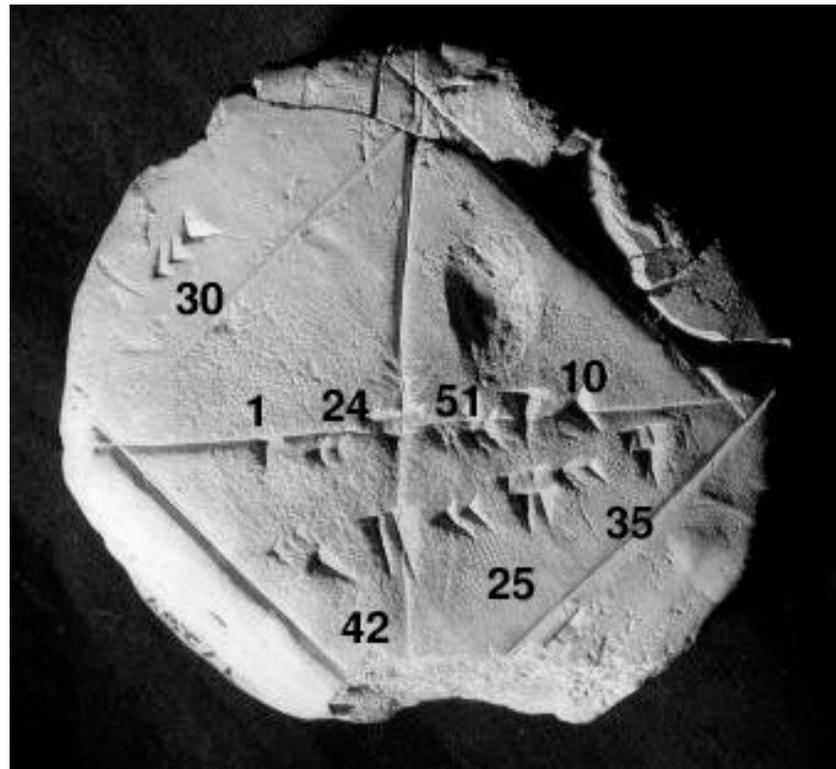


分数と小数

- 分数(fraction) 2学年
- 小数(decimal fraction) 3学年
- 何れも 3学年 「端数処理」として導入

分数と小数, どちらが古い?

- 分数と小数の歴史



分数の歴史 BCI650年頃 エジプト アーメスパピルス



単位分数への分解

$$\bullet \frac{5}{7} = \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} + \frac{1}{\square\square}$$

エジプトの分数の問題



$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21}$$

アラブの17頭のラクダ

「17頭のラクダを3人の息子で分けるように」と、遺言書を残して、年老いたアラブ人の父が亡くなりました。しかし遺言にしたがってラクダを分けようとした息子たちは、途方にくれることになりました。遺言には、長男に半分、次男に $1/3$ 、三男に $1/9$ のラクダを与える、とあったからです。遺言どおりに分けようとしても、割り切れないのです。

3人が困り果てているところに、ちょうどラクダに乗って1人旅をしている、算数の先生が通りかかりました。息子たちがこの先生に相談すると、ラクダを傷つけることなく、3人の息子たちが不満に思うこともなく分ける方法を教えてくださいました。この先生は、どうやって遺言どおりにラクダを分けたのでしょうか。

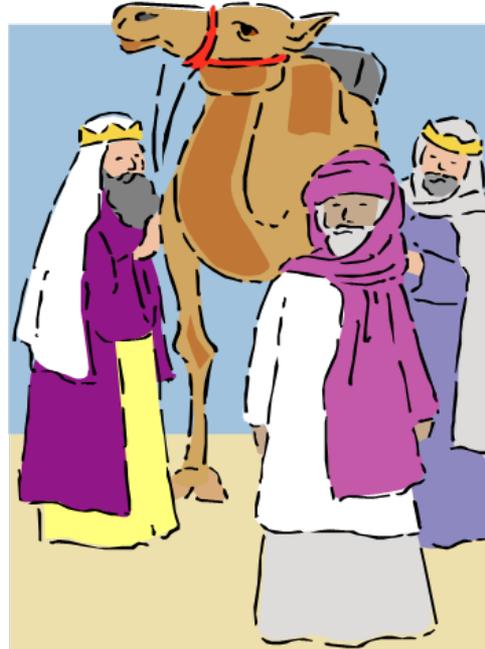


先生は乗ってきた1頭を貸した。
余った1頭を返してもらった。

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

先生は乗ってきた1頭を貸した。余った1頭を返してもらった。

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9 + 6 + 2}{18} = \frac{17}{18}$$



分数

● 分数はエジプト数学 B.C.1650年

– アーメス・パピルス

● 単位分数 $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$



分数

- 「分割操作」としての意味が強い
- 「分割操作」と「量の表現」
- 理論的
- Fraction
- $\frac{2}{3}$
- two thirds
- 比のイメージ

小数

- 60進法

- シュメール・バビロニア数学
- 紀元前2千年頃, 4千年前

- 10進法小数16-17世紀

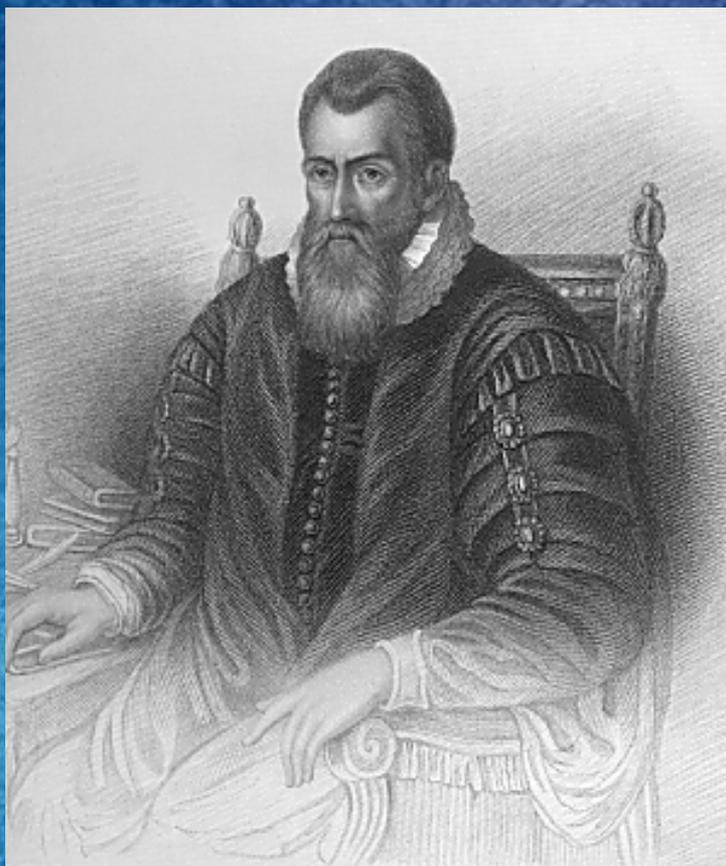
- オランダ Stevin 1585年



1548-1620

小数

- スコットランド John Napier (対数)
- 現代の表記 1605年



(1550–1617)

十進位取り記数法

- 十進位取り記数法
- インド・アラビア数字
- フィリオ・ボナッチ (13世紀, イタリア ピサ市)



『算学啓蒙』

13世紀

- 中国では, 1299年
- 元の朱世傑
- 分, 厘, 毛, 糸, 忽, 微などの単位



小数

- 3学年 「端数処理」
- 量の測定など実用的
 - 大きさがすぐに分かる
- 計算が簡単
 - 十進位取り記数法
- 無限概念

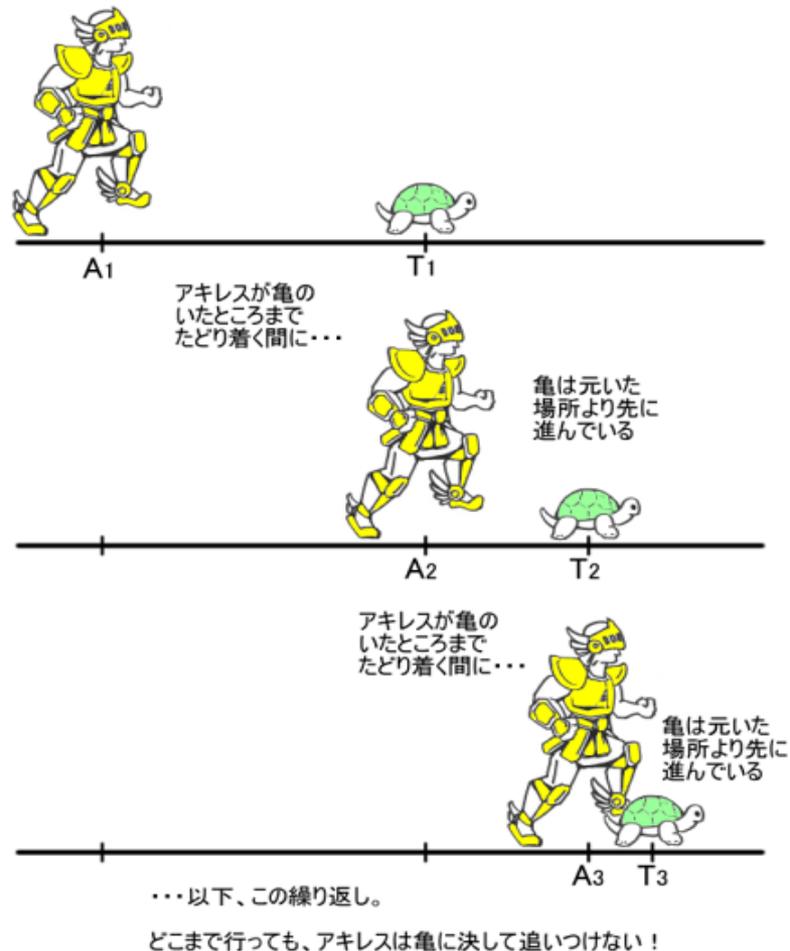
「 $1 = 0.999\cdots$ 」は正しいか

○ $\frac{1}{3} = 0.333\cdots$

○ 両辺に3をかける

○ $1 = 0.999\cdots$

アキレスと亀(ゼノンのパラドックス)



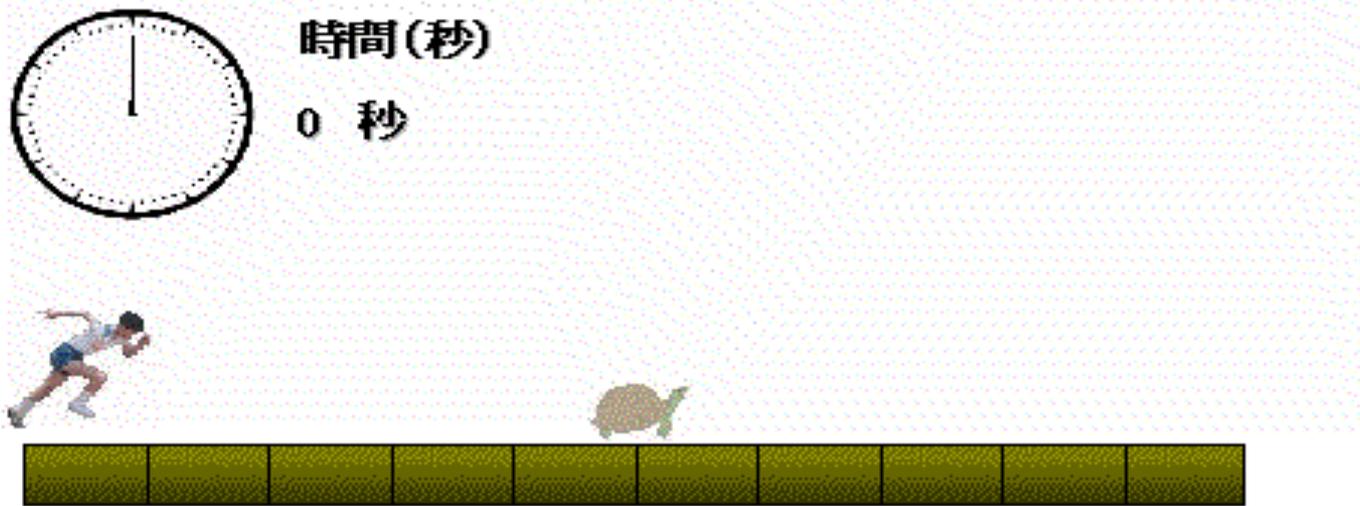
具体的に考えよう

- 議論を明確にするために、アキレスと亀が100m競争をしてみましょう。アキレスは古代ギリシャ随一のスプリンターですから100mを10秒、すなわち10m/秒で走るとします。亀は4m/秒（亀の中では驚異的に足の速い亀です）で走るとします。亀は100mの中央の50m地点からスタートするとします。
- アキレスが亀の位置まで行くのにかかる時間は $50/6=8.333\dots$ 秒

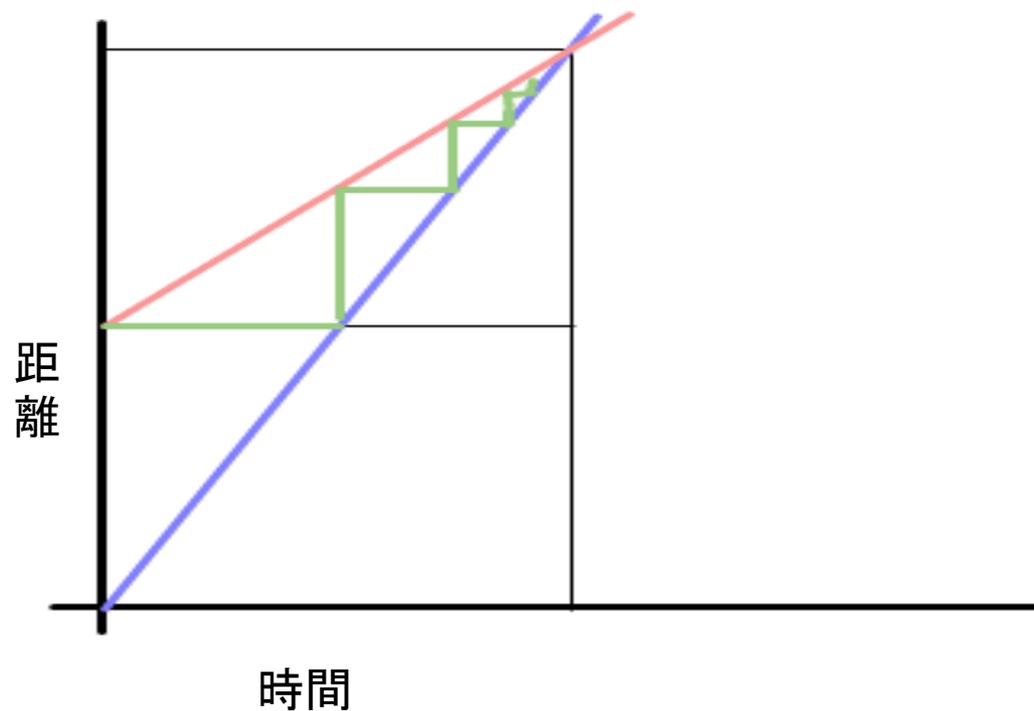
「アキレスは永遠に亀を追い越せない。」

- アキレスと亀が競走をする。
亀は遅いのでアキレスの前方から出発する。
アキレスが亀の出発地点まで行く間に、
亀は少し前へ出ている。前へ出た亀の位置
まで行く間に、亀はさらに少し前へ出る。
……この状況はいつまで経っても変わらない。
従って、アキレスは永遠に亀を追い越せない。

時間の経過が有限になっている



一次関数で考える



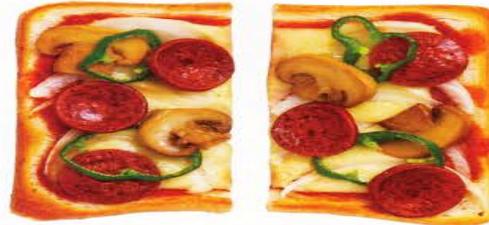
ゼノンの逆説を正しく言うと

- 「…この状況はいつまでも続くのではなく、有限の時間までであり、それはアキレスが亀に追いつくまでである。」というべきである。
- 古代ギリシャでは、「数字を無限に加えていっても無限に大きくなるとは限らない」ということを論理的に理解することが困難だった。

無限に対する近代思想

- 無限の過程は不可能でも、その結果がどうなるかは理解できる。
- 無限は制御でき、使いこなせる。
- 有限の区間を無限の過程に表現できる。
 - 有限の区間も、無限の区間に分割できる。
- 有限と無限に境を置かない。
- 数学は無限の科学

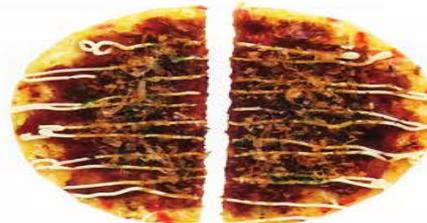
ピザトーストを 半分はんぶんに 分わけます。



ケーキを 半分はんぶんに 分わけます。



おこのみやきを 半分はんぶんに 分わけます。

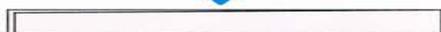
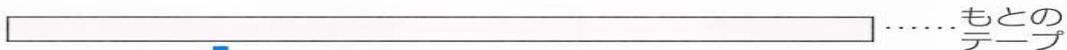


これから 学まなんで いく ことことの めあて
 半分はんぶんの 大きおきさをつくり、その あらわし方かたを
 しらべて いく。

2学年

2

下のようなテープをおって ^{はんぶん} 半分の大きさを
つくりましょう。

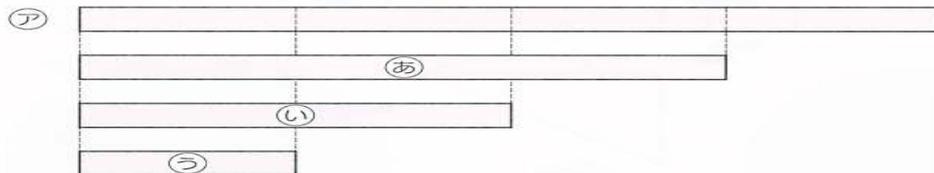


もとの大きさを ^{おな} 同じように 2つに ^わ 分けた
1つ分を、もとの大ききの ^{ふん} 二分の ^{いち} 一と いい、
 $\frac{1}{2}$ と かきます。

$$\frac{1}{2}$$

分割分数

3 ①の $\frac{1}{2}$ の大きさに なって いるのは どれですか。

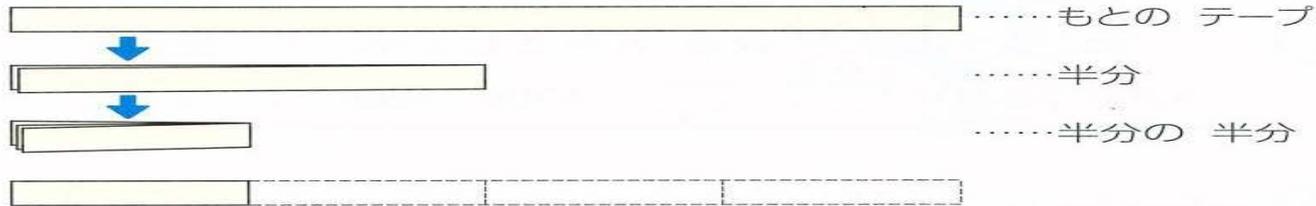


4 テープの $\frac{1}{2}$ の大きさに ^{いろ} 色を めりましょう。



5

テープを半分に おって、また、それを 半分に
おった 大きさを つくりましょう。



もとの 大きさを 同じように 4つに 分けた 1つ分を、
もとの 大きさの $\frac{1}{4}$ と かきます。

 $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{4}$ のような $\frac{\text{かず}}{\text{ぶん}}$ を $\frac{\text{ぶん}}{\text{すう}}$ と いいます。

$\frac{1}{2}$ の 2つ分や
 $\frac{1}{4}$ の 4つ分は、
もとの 大きさに
なります。



⑥ $\frac{1}{4}$ の テープを さらに 半分に おると、
どんな 大きさに なりますか。



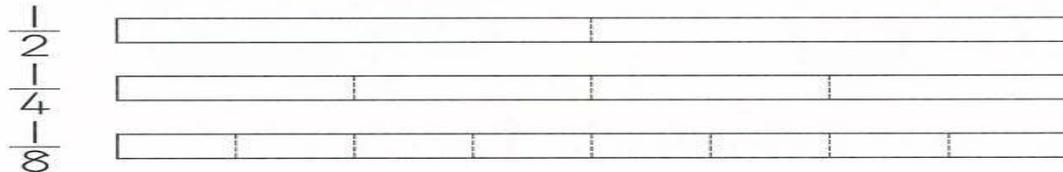
かんそう

$\frac{1}{2}$ や $\frac{1}{4}$ の
大きさが
よく わかり
ました。

 $\frac{1}{8}$

7

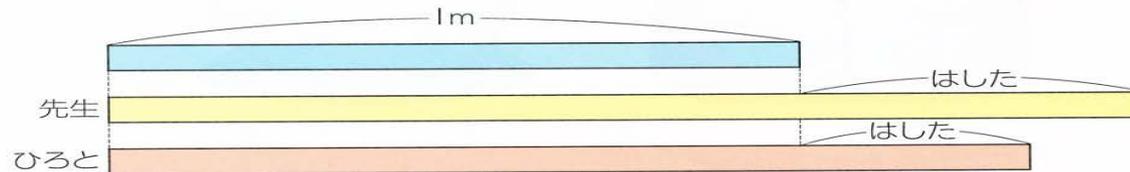
つぎの 大きさに 色を めりましょう。



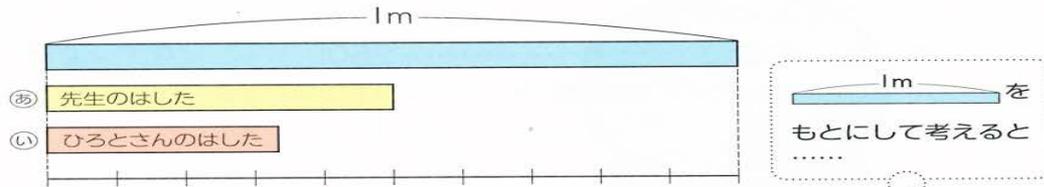
103

先生とひろとさんが、両手を広げた長さをテープに写し取りました。

どちらも1mと、次のようなはしがありました。



はしたの長さは、何mといえよいですか。



Ⓐは50cmで、
Ⓘは30cmくらいかな？

Ⓐは1mの半分で、
Ⓘは半分よりも短いけれど……



これから学んでいくことのめあて
はしたの大きさの表し方を考えていこう。

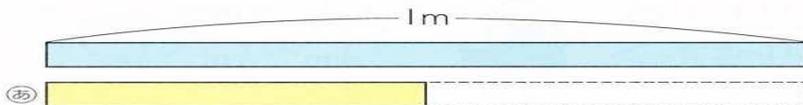
1 はしたの大きさの表し方

1 はしたの長さを、1mのテープをもとにして表してみよう。

端数処理

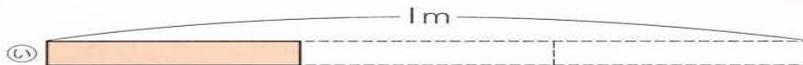


1mのテープを、同じ長さいくつかにおいて調べてみましょう。



あ の長さは、1mのテープを2等分した1こ分の長さになっています。

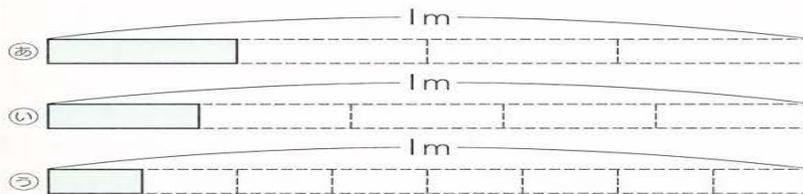
あ の長さは、1mの $\frac{1}{2}$ (2分の1) になります。



い の長さは、1mのテープを3等分した1こ分の長さになっています。

い の長さは、1mの $\frac{1}{3}$ (3分の1) といいます。

② 下のテープの長さは、1mのどれだけですか。



等しい大きさに分けることを「等分する」といいます。

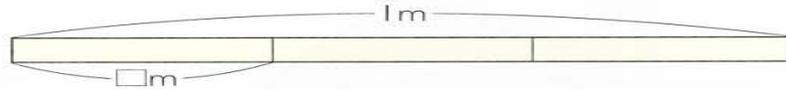


1mを基準にしている

3

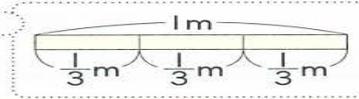
1mのテープを3等分しました。
次の長さは、それぞれ何mといえよですか。

ア 1こ分の長さ

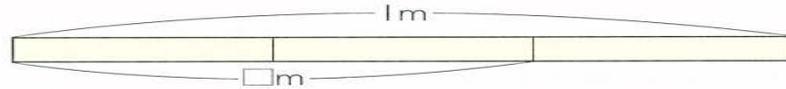


1mの $\frac{1}{3}$ の長さを $\frac{1}{3}$ mとかき、「3分の1メートル」とよみます。

$\frac{1}{3}$ mの3こ分は1mです。



イ 2こ分の長さ

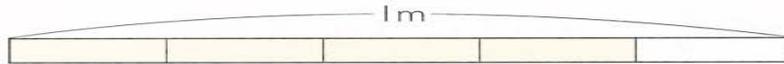


$\frac{1}{3}$ mの2こ分を $\frac{2}{3}$ mとかき、「3分の2メートル」とよみます。

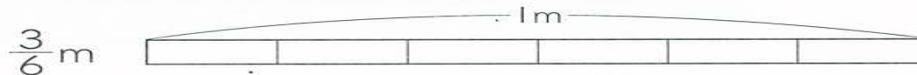
$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ のような数を分数といいます。

$\frac{2}{3}$ 分子
3 分母

④ 色をぬったところの長さを、分数でかきましょう。



⑤ 次の長さにあたるところに色をぬりましょう。



⑥ 次の長さは、 $\frac{1}{7}$ mの何こ分ですか。

ア $\frac{2}{7}$ m

イ $\frac{5}{7}$ m

ウ $\frac{6}{7}$ m

分数の意味

8 2学年 「 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ 」 分割分数

○ 3学年 「端数処理」 量分数

2 分数と小数・整数の関係

わり算と分数

1 ジュース2Lを3等分すると、1個分は何Lになりますか。

式

2 ÷ 3 = 0.66……
わり切れないな。



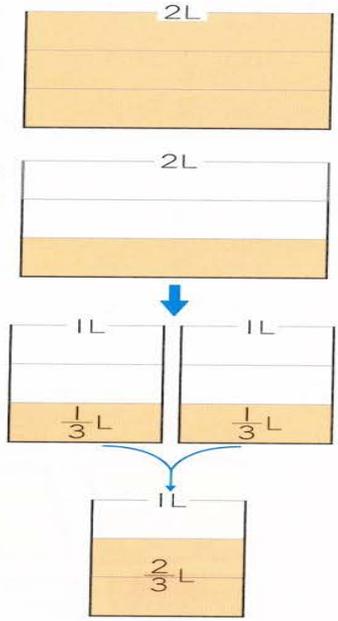
商を分数で表すことを考えましょう。

2Lが、1Lずつ2個のいれものにはいっていると考えると、 $\frac{1}{3}$ Lが2個分だから $\frac{2}{3}$ Lになります。

2 ÷ 3 = L

$\frac{2}{3}$ は、次の2とおりに考えることができます。

$\frac{2}{3}$ は、 $\frac{1}{3}$ の2個分 $\frac{2}{3}$ は、2 ÷ 3の商



$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

分割分数

量分数

まとめ わり算の商の表し方

わり算の商は、わられる数を分子、わる数を分母とする分数で表せます。



2 次の商を分数で表しましょう。

- ㊦ 1 ÷ 4
- ㊧ 3 ÷ 5
- ㊨ 5 ÷ 9
- ㊩ 10 ÷ 7

2 分数と小数・整数の関係

わり算と分数

1

ジュース2Lを3等分すると、1個分は何Lになりますか。

式

$2 \div 3 = 0.66\dots$
わり切れないな。



商を分数で表すことを考えましょう。

2Lが、1Lずつ2個のいれものにはいっていると考えると、 $\frac{1}{3}$ Lが2個分だから $\frac{2}{3}$ Lになります。

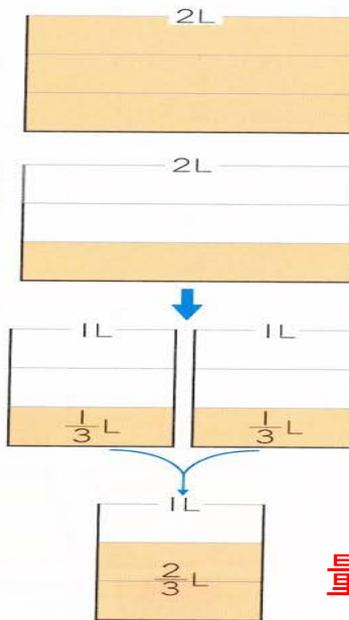
$2 \div 3 =$

 L

$\frac{2}{3}$ は、次の2とおりに考えることができます。

$\frac{2}{3}$ は、 $\frac{1}{3}$ の2個分

$\frac{2}{3}$ は、 $2 \div 3$ の商



量分数

まとめ わり算の商の表し方

わり算の商は、わられる数を分子、わる数を分母とする分数で表せます。

$\triangle \div \square = \frac{\triangle}{\square}$

商分数

2

次の商を分数で表しましょう。

㊦ $1 \div 4$

㊦ $3 \div 5$

㊦ $5 \div 9$

㊦ $10 \div 7$

分割分数と量分数の違い

8 2学年 「 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ 」 \Rightarrow 分割分数

○ 3学年 「端数処理, 単位のついた分数」
 \Rightarrow 量分数

分割分数と量分数の違い

- 分割分数

- 分割する対象を1としている。

- 量分数

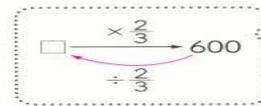
- 1とする量は決まっている。

2 分数のわり算を使って

- ① びんにジュースが600mLはっています。
これは、びん全体のかきの $\frac{2}{3}$ にあたります。
びん全体では何mLはいりますか。



🗨️ 全体の量の $\frac{2}{3}$ が600mLであることから考えましょう。



割合分数

$$600 \div \frac{2}{3} = \square$$

$$\square \text{ mL}$$

- ② 機械で、 $35a$ の芝^{しげ}を1時間10分でかりました。
1時間あたり何 a の芝をかったことになりましたか。

🗨️ 時間を分数で表して求めましょう。

1時間10分は $\frac{7}{6}$ 時間だから、

$$35 \div \frac{7}{6} = \square$$

$$\square a$$

割合の第三用法

- ③ \square にあてはまる数をかきましょう。

ア \square 人の $\frac{1}{4}$ は25人です。

イ 4kgは、 \square kgの $\frac{2}{7}$ です。

- ④ 機械で、 $24a$ の芝を40分でかりました。
1時間では何 a の芝をかることができますか。

分数の意味

- 2学年 ⇒ 分割分数
 - $\frac{2}{3}$: 3つに分けた2つ分
- 3学年 ⇒ 量分数
 - 「端数処理, 単位が付く分数」
- 5学年 ⇒ 商分数
 - 「 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ 」
- 6学年 ⇒ 割合分数
 - 「AはBの $\frac{2}{3}$ 」

なぜ量分数が中心なのか？

- 2年 分割分数
- 3年 量分数
- 4年 量分数
- 5年 量分数
- 6年 量分数
割合分数



3学年

- ☑ ポットに水がどれだけはあるかを調べたら、
2Lと右のようなはしがありました。
はしたの大きさを表してみましょう。

$\frac{1}{3}$ L くらいかな……



1Lをいくつに分けて
はかったらいいのかな。



端数処理

- ☑ はしたの大きさを1Lますではかったら、
右の図のようになりました。
はしたの大きさを分数で表しましょう。



目もりは10等分
されています。



はしたの大きさを表すとき、もとのたんの $\frac{1}{10}$ を使って表す
ことがよくあります。

これから学んでいくことのめあて

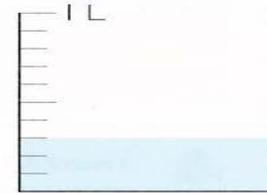
$\frac{3}{10}$ のような数には、べつの表し方があります。
この表し方について調べていこう。

1 はしたの大きさと小数

1

左のページのポットの水のかさは、
2Lとはしたが $\frac{3}{10}$ Lでした。

はしたの大きさの、べつの表し方を
調べましょう。



1Lの $\frac{1}{10}$ のかさを、0.1Lとかき、
「れい点いちリットル」とよみます。

$$0.1L = \frac{1}{10}L$$

$\frac{3}{10}$ Lは、0.1Lの3こ分で、0.3Lです。

2Lと0.3Lをあわせたかさを、2.3L(二点三リットル)と表します。

帯小数？

0.1, 0.3, 2.3のような数をしょうすう小数といい、
「.」をしょうすうてん小数点といいます。

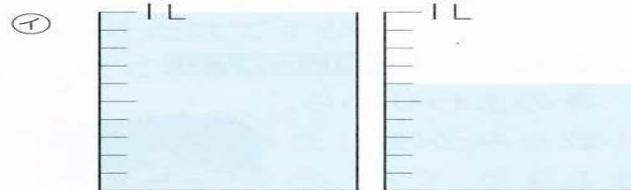
小数点の右の位をくさい $\frac{1}{10}$ の位といいます。

0, 1, 2, ……のような数をせいすう整数といいます。

2	3
—	$\frac{1}{10}$
の	の
位	位

↑
小数点

2 次のかさを小数で表しましょう。



$\frac{3}{10}$ Lは, 0.1Lの3こ分で, 0.3Lです。

2Lと0.3Lをあわせたかさを, 2.3L(二点三リットル)と表します。

帯小数