数学科教育 CIII 用語集（４）

※ 中原忠男(編)(2000).『算数・数学科重要用語 300 の基礎知識』. 明治図書. から抜粋.

■問題解決指導 (Teaching Problem Solving)

算数・数学科の問題解決指導とは，学習者に問題解決をさせることによって算数・数学を指導しようとするものであり，算数・数学そのものを学習者に伝達するという形式的指導と対置される指導法である。

1980 年に NCTM が発行したアジェンダの第 1 勧告として問題解決が強調されて以来，アメリカだけでなくわが国などでも問題解決指導が広く取り入れられるようになってきた。ただし，わが国ではそれ以前から，数学的な考え方を育成するための指導法として，ある程度の問題解決指導が実質的に行われていた。また，生活単元学習の時代においては，児童・生徒の生活体験に関わる問題の解決が重要視されていたことも周知の事実である。

問題解決指導に対しては，このように多様な捉え方が存在していたが，アメリカやわが国などで望ましい問題解決指導として提案されるものには，いくつかのタイプがあることが次第にわかってきた。中原忠男氏は，わが国の特に算数教育にとって重要な問題解決指導として，Ａ方法型，Ｂ特設型，Ｃ設定型の３つを挙げている。このうちＣは問題設定を重視するものであり，次頁の「$\boxed{56}$ 問題設定」で詳述される。そこで，ここでは，ＡとＢについて，その特徴をまとめよう。

まず，学習指導要領で示された内容を問題解決的に指導するのがＡ方法型であり，この指導の基本的なねらいは，知識や考え方を身につけさせることである。そのための方法として問題解決指導を取り入れるわけであり，これは，わが国で最も多く行われているものである。通常，単元の中で問題解決指導を行う場合，単元の導入場面と応用場面の２ヵ所で取り入れられることが多い。後者の立場は古くから見られたが，方法型として強調されているのは，むしろ前者の立場であり，その初期的実現は，昭和 10 年から発行された緑表紙教科書の中に見られる。

一方，学習指導要領の内容とは別に特設単元を設定して，問題解決を指導しようとするのがＢ特設型である。おもしろい問題，価値のある問題を開発して投げ入れ教材として扱おうとするものである。特設型では問題解決能力の育成を第一目的とすることが多く，既習の知識・技能やストラテジーを駆使してようやく解決できるような挑戦的な問題を扱うことが大切となる。中学校数学などの「課題学習」は，特設型の問題解決指導として典型的なものといえるだろう。

最近の算数・数学教育では，特に研究発表会などにおいて，このような問題解決指導が極めて多くなってきている。知識や技能の教え込みから脱却した，算数・数学のいわゆる「よい授業」として，問題解決指導は定着してきた感が強い。

〈参〉数学教育学研究会編(1991).『新算数教育の理論と実際』聖文社.　　　(飯田慎司)

■問題設定 (Problem Posing)

問題設定とは，問題解決を広義に捉えた場合に，与えられた問題を解くこととは別に，学習者自身が問題をつくることを意味している。場合に応じて「作問」とか「問題づくり」「問題から問題へ」などとも呼ばれることがある。

問題設定は大きく次の３つのタイプに分けて考えることができる。

① 現実からの問題設定

② 条件からの問題設定

③ 問題からの問題設定

①は学習者が現実世界(real world)の問題を算数・数学の問題に仕上げていく，いわゆる数理化の過程にあたるものである。①の典型的な例としては，大正末期に奈良女高師附小で行われた「作問中心算術教育」が挙げられる。当時，「生活算術」と呼ばれた運動の気運の中で，清水甚吾氏らを中心として，学習者自身による問題設定の指導が強調された。

②の問題設定の方法は，「３＋５の式になる問題をつくりましょう」とか，動植物の絵などを示して「この絵から，かけ算の問題をつくりましょう」と発問したりして問題設定をさせる方法である。この方法は，他のものより拡散しにくく，単元の指導内容からも離れていかないために，安心して使えるという特徴がある。

③の方法は，解決した問題をもとに，その問題の条件を変更したりして，発展的な問題を設定させようとするものである。この立場の典型的な例としては，「問題の発展的な扱いによる指導の研究」が挙げられる。この研究の大きな特徴として，子どもの行う問題設定を教育的立場からの評価に役立てていこうとしている点が指摘できる。作られた問題の量だけでなく質なども考慮しながら評価していくわけである。

さて，学習者の自由な問題設定を許していると授業が拡散してしまうことも少なくない。また，学習者が活発に取り組み，しかも柔軟性や独創性のある問題を作るようになるためには，それなりの経験が要ることもまた事実である。そこで，条件を変えることによって組織的に問題設定を行う方法として提案されたのが，次の３つの段階から成る“ What if not ?”(〜でなければどうか)である。

(1) そのシチュエーションの属性を挙げよ。

(2) その中の１つの属性を変えてみよ。

(3) 新しくなったシチュエーションから問題を設定せよ。

このようにシチュエーションを作り変えて新しい問題を設定していこうという発想は，教えられて身につくというよりも，学習者が主体的・探究的に問題解決に取り組んでいくプロセスの中から獲得されていくものと捉えるべきであろう。

〈参〉竹内芳男・沢田利夫(編著) (I984).『問題から問題へ』東洋館出版社.　M.I.Walter & S.I.Brown (1969) “What if not ?". *Mathematics Teaching*, vol.46, pp.38-45.　　(飯田慎司)

■What If Not？

What If Not？（でなければどうか）というのは，ブラウン(Brown,S.I.)とワルター(Walter,M.I.)が 1969 年に同題目の論文において提起した，カリキュラム開発や教材開発の方略をいう。この方略は両氏によってその後も研究され続け，また，各国でもその研究・実践が展開され，今日では問題設定の重要な方略として広く知られ，高い評価を得ている。

数学の問題や定理には一般に多くの属性—仮定における条件や結論の内容等—が含まれている。これらに着目し，その属性を What If Not? という発想で変えていき，新しい問題をつくりだすのがこの方略である。例として，次のピタゴラスの定理を考えてみよう。

「△ABC において∠A＝∠R ならば，$BC^2＝AB^2＋AC^2$ である.」

この定理における属性として，例えば次のものが挙げられる。

① △ABC において∠A＝∠R，つまり定理は直角三角形を扱っている。

② BC^2＝AB^2＋AC^2 つまり定理は正方形の面積の関係を扱っている。

③ PならばQの形式をしている。

これらを What If Not ? の発想で変えていくのである。

①にそれを適用すると，直角三角形でなければどうかということで，例えば次のような変更が考えられる。

①―１　一般の三角形だったらどうか。
①―２　四角形だったらどうか。
①―３　直角の三角柱だったらどうか。

同様に，②や③に適用すると，例えば次のような変更が考えられる。

②―１　BC^3＝AB^3＋AC^3 だったらどうか。
②―２　BC^3＜AB^3＋AC^3 だったらどうか。
②―３　正方形でなく円だったらどうか。
③―１　逆にしてQならばPはどうか。

このような方法で，属性を変えて新しい問題をつくり，それらの解決を考えるのである。その際には，一般的な証明を考えたり，反例を考えたりすることになる。うまく問題がつくれないこともあるが，そのような活動の中で，初めの問題や定理と類似したものやより一般的なものが見いだされたりすることも多い。

ピタゴラスの定理の例で言えば，①―１はそれを一般化した余弦定理へ，また②―３は正方形でなくても一般には相似な図形であれば同様のことが言えることへとつながる。

上記のことから分かるように，この方略は問題の解決のみに囚われていた数学教育に大きな転換をもたらし，問題設定の場さらには創造的な活動の場を位置付ける上で，大きな役割を果してきた。

〈参〉ブラウン・ワルター(著), 平林一栄(監訳) (I990).『いかにして問題をつくるか』 東洋館出版社.
沢田利夫他編著(1995)『問題づくりの授業』東洋館出版社.

(中原忠男)

■アジェンダ (An Agenda for Action)

1980 年，米国の NCTM は「1980 年代の学校数学への勧告」という副題をもつ１冊のパンフレットを発行した。その見出しが An Agenda for Action となっていたことから，わが国をはじめ世界的にも「アジェンダ」と呼ばれ，算数・数学教育の研究においても頻繁に取り上げられてきた。

アジェンダの中では次の８つの勧告がなされている。

1　問題解決が 1980 年代の学校数学の焦点とならなければならない。
2　数学における基礎技能という概念には，計算の熟練以上のものを含めるべきである。
3　数学の指導計画では，すべての学年で電卓やコンピュータの能力が十分に利用されなければならない。
4　効率や能率に関する厳しい基準が数学教育に対して適用されなければならない。
5　数学の指導計画や生徒の学習成果は，通常のテストより広範な測定によって 評価されなければならない。
6　すべての生徒に数学の学習をもっと多く要求しなければならない。そして，多様な生徒集団の要求に適合すべく，広範な選択を認める柔軟な教育課程が計画されるべきである。
7　数学の教師は，自分自身や同僚達に対して，高い水準の専門性を要求しなければならない。
8　個人や社会に対する数学の理解の重要性に相応する程度にまで，数学教育への一般の人々の支援が高められなければならない。

このアジェンダが特に注目されるようになったのは，第１勧告で言われる問題解決の強調が際立っていたからである。Back to Basics というスローガンの下，基礎技能を重視した米国であったが，基礎技能の習得に目標を限定すると，指導法がドリルの反復練習に偏ってしまう傾向が生じた。そこで，問題解決にそれらを応用することを重視したのである。

NCTM の 1980 年報は，問題解決に関する特集号であったし，この頃から問題解決に関する研究が世界的にも盛んになされるようになっていった。

問題解決以外にも，アジェンダの中には，新時代に向けての改革の方向性がすでに示されていたことに注目すべきであろう。それは，教育課程や評価の改善，数学教師の専門性，電卓およびコンピュータの活用，そしてそれらに対する社会的支援 などである。

因みに，NCTM の 1983 年報は，An Agenda in Action という表題で発行された。これは，アジェンダで提起された改革がいかに実行に移されているかを扱ったものであった。

〈参〉NCTM (1980). *An Agenda for Action - Recommendation for School Mathematics of the 1980's*.

(飯田慎司)

■ストラテジー (Strategy)

ストラテジー(Strategy)という語が算数・数学教育において用いられる場合には，問題解決のストラテジーを指すことが多い。問題解決のストラテジーとは，問題解決の助けとなる一般的な手順・方策・技術などのことであり，問題解決能力をつけるためには，知識・技能等だけでなく，ストラテジーを獲得させていくことが有効であると言われている。

問題解決の過程を広く捉えると，問題設定と問題解法の段階とに分けられる。 前者の段階においても，現実的な問題場面をいかにして数学的問題に仕上げていくかとか，既に解決した問題からいかにして発展的な問題を作り出していくかと いったストラテジーが指摘できる。しかしながら多くの場合，問題をいかにして 理解し解決していくかという後者に関するストラテジーが中心的に捉えられているので，ここでも，後者に関するストラテジーについて述べることとする。

問題解決研究においては，今日までにいろいろなストラテジーが提案されてきているが，その中で最も有名なものが，ポリア(Polya,G.)による問題解決の４段階であろう。彼は，今から半世紀以上も前に「いかにして問題をとくか」という著書の中で，次の４段階を提起した。

1　問題を理解する (Understanding the problem)
2　計画を立てる (Devising a plan)
3　実行する (Carrying out the plan)
4　ふり返ってみる (Looking back)

ポリアが扱っているのは問題解決の全過程であり，しかも，どんな問題に対しても適用できることを意図したものであることから，このようなストラテジーを 総合的ストラテジーと呼ぶ人も多い。それに対して，主として「計画を立てる」 段階において有効となる着眼点や手法などをリストアップして，それらをストラテジーとして重視するという立場もある。このようなストラテジーとしては，例えば次のようなものが考えられる。

○パターンを探す　　○一般化する
○図や表をつくる　　○推測して確かめる
○逆向きに考える　　○簡単な数にする

これらのストラテジーは，どの問題に対しても適用できるものではなく，典型 的な例題を通して子どもたちに獲得させていくべきものである。これらは，特定 的ストラテジーと呼ばれたりもするが，数学的な考え方と似通っている

ところが あるとも指摘されている。
問題解決能力の育成を目指す問題解決指導において，ストラテジーの指導が有 効であることを示すデータが，多くの研究の中で報告されている。それらにおい ては，ストラテジーを被験者に指導した場合とそうでない場合とを比較して，前 者の方の問題解決能力が高くなっていることを統計的に実証することが多い。

〈参〉G.Polya(著),柿内賢信(訳) (1954).『いかにして問題をとくか』 丸善.　　(飯田慎司)

■アルゴリズム(Algorithm)

アルゴリズムをとりあえず，《誰にでもわかる明瞭な一連の命令（規則・手順・操作の系列）で，それを正確に実行しさえすれば，この命令に対応する問題をいずれも解決できるようなもの》としておこう。アルゴリズムが持っている一般的な特徴としては，決定性（個々の命令はだれがいつ何回繰り返しても同じ結果を与える），大量性（一定のタイプに含まれるすべての課題を解決できる），結果性（適当なデータが与えられれば必ず求めるべき結果を得ることができる）をあげることができる。

学習指導におけるアルゴリズムは，次の２つの様相に区分される。

(1)　アルゴリズムの学習指導
　(a)　学習内容のアルゴリズム化
　(b)　アルゴリズムの表現
(2)　学習指導のアルゴリズム化

このうち(2)は教育方法の問題なので，ここでは(1)について述べることにする。

(1)については，四則演算，開平・開立，ユークリッドの互除法，解の公式，微分・積分算法など実に多くのアルゴリズムをあげることができる。数学には様々な種類の問題解決のためのアルゴリズムが含まれている。しかもそれら多くのアルゴリズムは，数学の建物の中で様々な階層をなしている。

実際，$(a+b)^k$ について考えてみよう。k が 2, 3, …といった具体的な数である限り，その展開は$(a+b)(c+d)$の展開の方法を適用すれば可能である。しかし，k が n になれば，もはやそのようなアルゴリズムでは役に立たなくなる。それ故，$(a+b)^n$ を展開するためには，k が 2, 3, …のときに用いたアルゴリズムを総合的に反省した上で，新たなアルゴリズムをつくりださなければならなくなる。これがいわゆる二項定理と呼ばれているアルゴリズムである。

同様のことは，程度の差こそあれ，数学のいたるところに存在している。それ故，数学の学習指導において重要なのはあるアルゴリズムを適用することと，一般化，抽象化という数学の発展過程の文脈においてそのアルゴリズムを意識することとの差異を十分承知することといえる。子どものかような意識の変容が，子どものもつ数学的概念の進展の１つの標識となると思われる。アルゴリズムを発見していく過程にこそ，子どもたちの論理的でしかも創造的な思考の伸張が期待できるといえよう。

それ故，アルゴリズムは一方的に児童・生徒に与えるものではなく，問題を解決していく過程で出てきた考え方をまとめていくような形で扱い，一連の解決手続きをアルゴリズム化させ，そのよさを感得させることが重要になろう。

また，実行しているアルゴリズムを児童・生徒に意識させる上で，流れ図のような図的な表現様式は有効であろう。

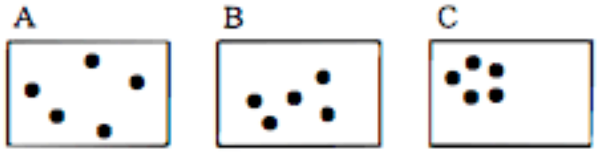
(植田敦三)

■オープンエンドアプローチ(Open Ended Approach)

一般に，普通の授業でとり上げられる算数・数学の問題では，正しい答が１通りに決まっているような問題が多い。これに対して，正答が幾通りも可能になるように条件づけた問題が考えられる。

この種の問題を，結果がオープンであるという意味から，オープンエンド（未完結な問題）といい，それを課題として展開していく授業をオープンエンドアプローチと称している。

オープンエンドの問題の例：A，B，Cの３人でおはじきを落とす遊びをしたら，図のようになりました。



この遊びでは，おはじきのちらばりの小さい方が勝ちとします。この例ではCが小さいといえそうです。このような場合，ちらばりの程度を表す方法をいろいろと考えてみましょう。

これはちらばりの程度をどう数値化するかという課題である。小学校６年生程度に適当と思われるが，中学校や高校の生徒でも十分に有効な教材と考えられる。

ある観点を決めると，それに応じた数値化の方法が考えられ，その方法は一意に決められないものである。オープンエンドアプローチの授業は，このような課題を題材として，そこに内在する正答の多様性を積極的に利用しながら授業を展開し，その過程で，既習の知識や数学的考え方を適用させ，新しい発見の経験をする学習活動である。

反応例は，以下のようなものがある。

①点を結んでできる多角形の面積
②点を結んでできる多角形の周の長さ
③２点を結ぶ線分の最大な長さ
④すべての点を結ぶ線分の長さの総和
⑤任意の１点と各点の長さの総和や平均
⑥５点をおおう最小の円などの大きさ
⑦方眼に落ちた小正方形の個数
⑧座標などを導入して平均偏差など

これらはいずれの方法にも長所や欠点がある。この課題を提示すると，例えば，ある生徒は①の方法でちらばりの大小を決めようとするであろうし，それに対して他の生徒は点が一直線に並んだときのことを考えて，一般的に不都合であることを指摘するかもしれない。

このように，この授業の学習活動は，まず，できるだけ多くの考え方を生徒から出させ，それに対して，お互いの答えの内容の欠点を指摘したり修正したりすることであり，また，問題場面を適切に数学化し，既習知識を活用して内在する関係や法則を発見し，問題を解決し結果を確かめることである。

この方法では，学力の低い生徒でも解答ができることと，授業への積極的参加が得られやすいことも長所の１つである。

〈参〉島田茂編著(1977).『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』 東洋館出版社.

(能田伸彦)

■問題解決能力 (Problem Solving Ability)

問題解決能力とは端的に言って，問題解決の過程で有効にはたらく力のことである。算数・数学の問題を解くためには，当該の算数・数学に関する知識が必要であるし，適切な表現を工夫したり計算等の処理をしたりする技能が必要である。

それでは，知識や技能をもっていればそれで十分であろうか。計算力はあるのに文章問題になると全然解けない小学生をよく見かけるし，方程式が与えられれば解けるの

に，文章問題からどんな方程式を立式したらよいかが分からないでいる中学生も多い。そんな時，線分図で表してみたら適当な計算式が得られたり，「何を x にするか考えよう」というような文言から始まる方程式の立式手順を思い浮かべたら，うまく立式できたりすることがある。このような例で示されるように，ストラテジーと呼ばれるようなものを獲得していることも，問題解決能力の大切な要因であることがわかる。

さて，1980 年代以降，数学的問題解決の研究が進展していくにつれて，上述のような認知的要因にとどまらず，メタ認知的要因や情意的要因も問題解決能力に関わっていることが指摘されるようになった。実は，上で扱ったストラテジーにしても，それを実際に使ったらうまくいくのではないかという判断の局面には，メタ認知的要因が介在している。このように，問題解決の実際では，自らの行動をモニターするメタ認知的能力と，解決意欲や興味・関心などの情意的要因なども，そのパフォーマンスに少なからず影響を与えていることがわかる。

問題解決能力を伸ばす指導のねらいには次の２つのことがあると考えられる。

まず第 1 に，問題解決能力をつけることが数学を学習し続ける上で必要不可欠であるということがある。算数・数学の学習は問題を解くことによって行われることが多く，数学の歴史は数学界の問題解決の歴史でもある。逆にいえば，問題が解けなければ数学の学習や研究は困難になってしまう。この見地に立てば，問題解決能力が数学的な考え方やさらには数学の学力と非常に近いものとして捉えられることになる。

問題解決能力をつける指導のもう 1 つのねらいとは，問題解決能力が算数・数学だけでなく，日常生活や他の分野の事象の処理においても求められることである。人間は日々，問題解決しながら生きているし，また，いろいろな分野で数学の問題解決能力が思考力として役立てられているはずである。この意味では，問題解決能力が「生きる力」に近いものとして捉えられ，その育成が，人間形成としての究極の目的であるとも言えるのではなかろうか。

〈参〉片桐重男・古藤怜・平岡忠編著(1985)『問題解決能力を伸ばす指導　最新中学校数学科指導法講座２』明治図書.

（飯田慎司）