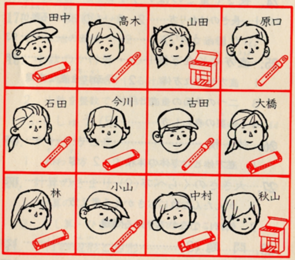
15. なかまの集め方と分け方

1　集合の表わし方

なかまを集めたり分けたりするときの，もとになる考え方を調べましょう。

(1) 下の絵は，田中くんの学級で，音楽クラブにはいっている人と，その受け持つ楽器とを表わしています。



この人たちは，右のページの表のあ，い，うのような三つのなかまに分かれて練習します。

あ，い，うは，それぞれどんななかまでしょうか。

あ	田中，今川，大橋，林，中村
い	高木，原口，石田，古田，小山
う	山田，秋山

一つのなかまとみられるものの集まりを，**集合**といいます。そして，集合を作っている一つ一つのものを，集合の**要素**といいます。

(2) (1)の音楽クラブの男の人の集合を作り，その要素をぜんぶ書きならべて，{　　} でかこみましょう。また，女の人の集合の要素も，ぜんぶ書きましょう。

男の人の集合 {田中，原口，　　　　　　　　}

女の人の集合 {高木，　　　　　　　　　　　}

集合は，要素をぜんぶ書きならべて，それを {　} でかこんで表わすことができます。

2 集合の関係 (1)

(1) 下の絵は，林さんの家の人を，ぜんぶ表わしています。

家の人を一つの集合と考え，その要素のうち，子どもだけで一つの集合を作りましょう。

(家の人の集合)

…… { やすお，たか子，よし子， }

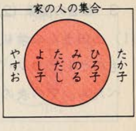
(子どもの集合) …… { よし子， }

一つの集合の要素の一部分で，また集合を作ることができます。このようなとき，二つの集合の関係は，⊃や⊂の記号を使って，つぎのように表わすことができます。

(家の人の集合) ⊃ (子どもの集合)

(子どもの集合) ⊂ (家の人の集合)

家の人の集合と子どもの集合との関係は，右のような図をかくとよくわかります。



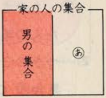
(2) 林さんの家の人の集合から，男の集合を作りましょう。

1. 家の人の集合と男の集合との関係を，⊃の記号を使って表わしましょう。また，上のような図に表わしましょう。

2. 家の人の集合の要素から，男の集合の要素をのぞいたのこりは，どんな集合になるでしょうか。

右の図では，どこの部分で表わされるでしょうか。

3. 家の人の集合と男の集合との関係を右のような図で表わすと，あの部分はどんな集合を表わすでしょうか。



3 集合の関係 (2)

(1) 山田さんの学級で，12人について，きょう，ものさしとコンパスを持ってきたかどうかを調べたら，下の表のようになりました。

持ち物調べ

せいとの番号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
ものさし	○	○	×	×	○	×	×	○	○	×	×	×
コンパス	×	○	○	○	○	×	○	×	○	○	○	×

○は持ってきた人　　×は持ってこなかった人

1. 上の表からつぎの集合を作り，それぞれ，{ }を使って書きましょう。要素はせいとの番号で表わしましょう。

　あ 上の表の全員の集合

　い ものさしを持ってきた人の集合

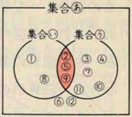
　う コンパスを持ってきた人の集合

　え ものさしとコンパスの両方とも持ってきた人の集合

2. つぎのことをたしかめましょう。

　集合え ⊂ 集合い　　　集合え ⊂ 集合う

3. 右の図は，1.で作った集合の要素を整理したものです。



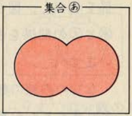
　集合えは，右の図のどの部分で表わされているでしょうか。

(2) つぎの集合は，上の図のどの部分で表わされているでしょうか。

か……ものさしだけを持ってきた人の集合

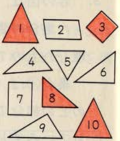
き……コンパスだけを持ってきた人の集合

(3) (1)の問題で，ものさしとコンパスのどちらか一方か，両方かを持ってきた人の集合を作りましょう。その集合は，右の図のどの部分で表わされるでしょうか。



　また，その部分をのぞいたのこりの部分は，どんな集合を表わしているでしょうか。

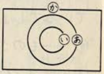
(4) 右の図のような紙を切りぬいて作った図形から，

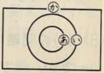


あ…白い図形の集合
い…白い三角形の集合
う…赤い三角形の集合
え…三角形全体の集合

を作って，それらの関係を調べましょう。

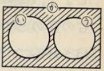
1. 集合あといの関係を表わすには，①と②のどちらの図がよいでしょうか。

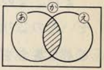
①


②


かは全体の集合を表わしています。

2. 図③は集合いとうの関係を表わし，図④は集合あとえの関係を表わしています。

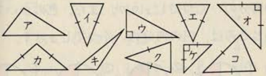
③


④


ななめの線の部分は，それぞれどんな集合を表わしているでしょうか。

終わりの練習

(1) つぎの三角形から，二等辺三角形の集合を作りなさい。また直角三角形の集合を作りなさい。

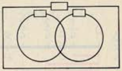


(2) 1から15までの整数の集合あを考え，その要素でつぎの集合を作りなさい。

い……1から8までの整数の集合
う……6から12までの整数の集合
え……2から5までの整数の集合

(3) (2)のいとえの集合の関係を，⊃や⊂の記号を使って表わしなさい。

(4) (2)のあ，い，うの集合の関係を，右のような図に表わしなさい。



(5) 分子が1で，分母が2から9までの分数の集合を作りなさい。

目　　次

§4. 位取り記数法

十 進 法

整数は，すべて，0から9までの十個の数字を使って表わすことができる。その表わし方は，1が十集まって10，10が十集まって100，…… というように，十ずつで位を進める位取りによるものである。たとえば，234は，

$$234=10^2\times2+10\times3+4$$

を表わしている。この位取りによる表わし方を **十進法** という。

十進法にもとづく数の性質を考えてみよう。

たとえば，6938は6930+8で，6930は $693\times5\times2$ であるから2でわり切れ，一の位の数8も2でわり切れるから，もとの6938は2の倍数であることがわかる。

1 十進法で表わされた数が，偶数か奇数かを見分けるには，どのようにすればよいか。次の数を偶数と奇数とに分類せよ。

(1) 123　(2) 432　(3) 3475　(4) 2730　(5) 2680

2 $100=4\times25$ であることから考えて，4の倍数を見分ける方法をいえ。また，1の数の中から，4の倍数を選び出せ。

例題 4657を9でわったときの余りは，各位の数の和 $4+6+5+7$ を9でわったときの余りに等しい。そのわけをいえ。

解

$$\begin{aligned}4657&=1000\times4+100\times6+10\times5+7\\&=(999+1)\times4+(99+1)\times6+(9+1)\times5+7\\&=999\times4+99\times6+9\times5+(4+6+5+7)\quad\cdots\cdots(1)\end{aligned}$$

$999\times4+99\times6+9\times5$ は9の倍数だから，上の数を9でわったときの余りは，$4+6+5+7$ を9でわったときの余りに等しい。

3 前ページの例題の解の式(1)を使って，4657を3でわったときの余りを求めるしかたを説明せよ。

4 次の数を9でわったときの余りをいえ。また，3でわったときの余りをいえ。

(1) 456　(2) 1234　(3) 4635　(4) 36851

五 進 法

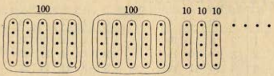
十進法では，十ずつで上の位に進むが，整数を表わすのに，五ずつで上の位に進むように位取りをすることもできる。つまり，1が五つ集まったものを10，10が五つ集まったものを100，…… というように表わすしかたである。

このしかたで，整数を1から順に書いていくと，

1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, ……

のようになり，すべての整数を，0，1，2，3，4の5個の数字を使って書き表わすことができる。この表わし方を **五進法** という。

五進法の10は，1が五つ集まったものだから，十進法の5，五進法の100は，それが五つ集まったものだから，十進法の 5^2 である。同じように，五進法の1000，10000，…… は，それぞれ，十進法の 5^3，5^4，……を表わす。だから，たとえば，五進法の234は，



で，十進法では，　$5^2\times2+5\times3+4=69$

となり，五進法の234は十進法の69を表わしている。

注 五進法の234は十進法と区別して，$234_{(5)}$ のように書くことがある。

[5] 五進法で書かれた次の数は，十進法ではどんな数か。

(1) 32　(2) 44　(3) 101　(4) 2340

十進法で書かれた数を，五進法になおすには，右のように，5でつぎつぎとわっていき，各回の余りをならべて書けばよい。右の計算では，

$$
\begin{array}{r l}
5\,)\underline{273} & \\
5\,)\underline{\ 54} & \cdots\cdots 3 \\
5\,)\underline{\ 10} & \cdots\cdots 4 \\
5\,)\underline{\ \ 2} & \cdots\cdots 0 \\
0 & \cdots\cdots 2
\end{array}
$$

$$273=5^3\times2+5^2\times0+5\times4+3$$

となることがわかるので，十進法の273を五進法で表わすと，2043となる。

[6] 十進法で書かれた次の数を，五進法で表わせ。

(1) 18　(2) 32　(3) 101　(4) 185

次に，五進法で書かれた数の計算を考えてみよう。

○ 十進法では $2+4=6$ であるが，6は五進法で書くと11だから，五進法では $2+4=11$ となる。これにならって，次の計算の結果を五進法で書いてみよ。

$1+2$　$2+3$　$3+3$　$3+4$

1×2　2×3　3×3　3×4

五進法で，1から4までの数について，たし算とかけ算の結果を表にすると，次のようになる。

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

五進法での計算は，上の表をみながら，十進法の場合にならってすればよい。

[7] 右の計算は，五進法でのたし算とかけ算の例を示したものである。そのしかたを考えてみよ。

また，十進法になおして，計算の結果の正しいことを確かめよ。

$$
\begin{array}{r}
123 \\
+\ 341 \\ \hline
1014
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
42 \\
\times\ 32 \\ \hline
134 \\
231 \\ \hline
2444
\end{array}
$$

[8] 五進法で，次の計算をせよ。

(1) $23+41$　(2) $320+241$　(3) $1234-322$

(4) 31×4　(5) 23×2　(6) 203×43

二進法

位取りのしかたは，十進法，五進法のほか，何進法でも考えられる。とくに，二ずつで上の位に進める **二進法** は，電子計算機にも利用され，有用なものになっている。

二進法では，1が二つ集まって10，10が二つ集まって100，……になる。十進法の1，2，3，4，5，6，7，……を二進法で書くと，

1，10，11，100，101，110，111，……

となり，二進法では，0と1だけですべての整数が表わされる。

五進法の場合と同じように考えて，二進法の10，100，1000，……は，それぞれ，十進法の2，2^2，2^3，……を表わしている。

したがって，たとえば，二進法の110101は，十進法では，

$$2^5+2^4+2^2+1=53$$

を表わしている。

十進法で書かれた数を二進法になおすには，2でつぎつぎとわり，各回の余りを求めればよい。

十進法の38は，二進法では100110である。

$$
\begin{array}{r l}
2\,)\underline{38} & \\
2\,)\underline{19} & \cdots\cdots 0 \\
2\,)\underline{\ 9} & \cdots\cdots 1 \\
2\,)\underline{\ 4} & \cdots\cdots 1 \\
2\,)\underline{\ 2} & \cdots\cdots 0 \\
2\,)\underline{\ 1} & \cdots\cdots 0 \\
0 & \cdots\cdots 1
\end{array}
$$

研究　$a+b\sqrt{2}$（a，bは有理数）の集合

根号をふくんだ数の計算については，その簡単な場合を 1. 平方根 で学び，さらに，2. 式の計算 の§2. でも学んだ。ここで，数の集合を考える立場から，$a+b\sqrt{2}$ の形の数の間の計算について調べてみよう。

数については，加減乗除の四則計算がたいせつなもので，有理数の集合Qが四則について閉じていることは，よく知っている。

Qの上に，$\sqrt{2}$をつけくわえ，その間に四則計算を考えたとき，それらの数の仲間には，どのような数がふくまれるであろうか。

有理数と $\sqrt{2}$ との積を考えると，$3\sqrt{2}$，$\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ のような数ができるし，これらと有理数との和や差を考えると，$4-3\sqrt{2}$，$\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ のような数ができる。したがって，一般に，

$$a+b\sqrt{2}\ (a\in Q,\ b\in Q)$$

の形の数が，新しい数の世界にふくまれてくることになる。

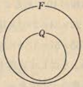
このような数の集合をFとする。

$$F=\{a+b\sqrt{2}\mid a\in Q,\ b\in Q\}$$

ここで，とくに，$b=0$ のときを考えれば，

F は Q をふくむ　($F\supset Q$)

といえる。



Fに属する数について，四則計算をすると，どのようになるだろうか。このことについて考えよう。

[1] Fに属する2数，$x=1+4\sqrt{2}$，$y=3-\sqrt{2}$ について，$x+y$，$x-y$，xy を求めよ。それは，どんな形の数になるか。

一般に，Fに属する2数の和，差，積は，やはり，Fに属する数である。つまり，Fは加法，減法，乗法について閉じている。

乗法についての単位元は1で，それは，$a+b\sqrt{2}$ で，$a=1$，$b=0$ の場合である。

では，Fは除法について閉じているだろうか。

除法は逆数をかけることだから，まず，逆数を考えてみよう。

たとえば，$3-\sqrt{2}$ の逆数は $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ である。この分母を有理数にすることを考える。乗法の公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を頭において，分母，分子に $3+\sqrt{2}$ をかけると，次のようになる。

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3+\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{2}}{9-2}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{2}$$

だから，$3-\sqrt{2}$ の逆数は，やはり，$a+b\sqrt{2}$ の形の数で，Fに属している。

[2] Fに属する次の数の逆数を求めよ。

(1) $2\sqrt{2}$　　(2) $1+3\sqrt{2}$

これまで調べたように，Fは乗法について閉じており，Fに属する数の逆数がFに属するのであるから，Fは除法についても閉じている。

[例] $(1+4\sqrt{2})\div(3-\sqrt{2})=(1+4\sqrt{2})\times\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$

$$=(1+4\sqrt{2})\times\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{11}{7}+\frac{13}{7}\sqrt{2}$$

[3] $(7-4\sqrt{2})\div(1+3\sqrt{2})$ を求めよ。

これまでのことから，

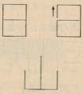
Fは四則計算について閉じている

ことがわかる。

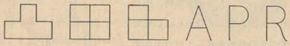
[4] Iが整数の集合のとき，集合 $\{a+b\sqrt{2}\mid a\in I,\ b\in I\}$ は加法，減法，乗法，除法のどれについて閉じているか。

問　題　B

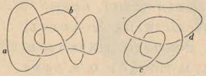
1. 鉛筆を紙から離さないで，つづけて，ある線をかくことを，ひと筆がきという。この場合，同じ点は何度も通ってよいが，同じ線の上は2度とはたどらないものとする。



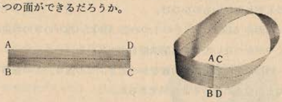
日という字はひと筆がきでかけるが，山という字は，これができない。下のおのおのの線ではどうか。



2. 右の空間の閉曲線で，a と b，c と d は，それぞれからんでいるか。



3. 長方形の紙 ABCD で，辺 AB と辺 CD を，この順に重ねてはって，メビウスの帯をつくる。その中央をはさみで切っていくと，2つの面ができるだろうか。

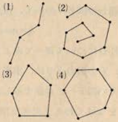


また，長方形の紙 ABCD に，AB の3等分点を通って，AD に平行な2つの直線があらかじめかいてあるとき，この線に沿って，メビウスの帯を切るとどうなるか。

2.　オイラーの定理

§1.　線　分　の　図

148〜151ページで，いろいろな線のつながりぐあいについて調べたが，これらの線は，つながりぐあいを変えないで，線分のつながった図になおすことができる。



たとえば，148ページの A の線のように，両端のある1本の線は，右の図の(1)，(2)のような線分のつながりと見ることができ，B の線のような閉曲線は，(3)，(4) のような多角形の周と見ることができる。

これらの線分の図には，それぞれどんな特徴があるだろうか。

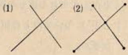
このような図で，1つ1つの線分を辺，その両端の点を頂点ということにし，頂点の数を v，辺の数を e とする。すると，多角形では，頂点の数と辺の数は等しいから，上の (3)，(4) の図では，

$$v-e=0$$

問 上の (1)，(2) の図では，$v-e$ の値はどうなっているか。

他のつながりかたについても，$v-e$ の値を調べることにしよう。

ここで，線分の図は，頂点でつながりあったものを考えているので，右の図の(1)のように交わった線では，(2) のように，交点も頂点になっているものとする。



前ページで調べたように，多面体の頂点，辺，面の数の間には，次の関係がある。

> 多面体で，頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると，
> $$v-e+f=2$$

これを，多面体についての **オイラーの定理** という。

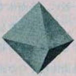
[1] 正多面体について，v，e，f の値を表にすると右のようである。

この場合，オイラーの定理が成り立っていることを確かめよ。

	v	e	f
正四面体	4	6	4
正六面体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20


正四面体


正六面体（立方体）


正八面体

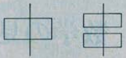

正十二面体


正二十面体

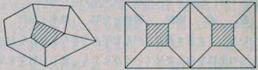
[2] 多面体で，すべての面が三角形のとき，辺の数 e と面の数 f との間には，$2e=3f$ という関係が成り立つ。なぜか。このことから，このような多面体では，頂点の数 v と面の数 f の間に，
$$v=\frac{1}{2}f+2$$
という関係が成り立つことを示せ。

問　題　A

1. 右の線分の図において，頂点の数を v，辺の数を e とする。
$$k=v-e$$
の値を求めよ。



2. 下の図の多角形のつながりで，斜線はその部分の多角形が欠けていることを示すものとする。頂点，辺，面の数を，それぞれ，v，e，f として，$k=v-e+f$ の値を求めよ。



問　題　B

1. 153 ページでのべた曲面 T と同じつながりぐあいをした多角形のつながりでは，頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると，
$$v-e+f=0$$
となっている。

下の右の図形 F の場合について，これを確かめよ。

T

F