令和２年度前期　数学科教育CIII

学習指導と問題解決(1)(2)

授業の目的とプロセス・方法

・スライドの抜粋 (pdf)

・数学科教育CIII 用語集(4)（３頁 pdf）

■ 算数・数学の指導プロセス

- **巷でよく見かける算数・数学の指導過程**
  1. 問題把握・理解
  2. 自力解決
  3. 発表
  4. 練り上げ（集団解決）
  5. まとめ

何故，このようなプロセスが普及したか？

数学的問題解決の過程

狭義の問題解決過程の典型例(Polyaの４段階)

１．理解　　　　問題把握・理解

２．計画　　　　自力解決

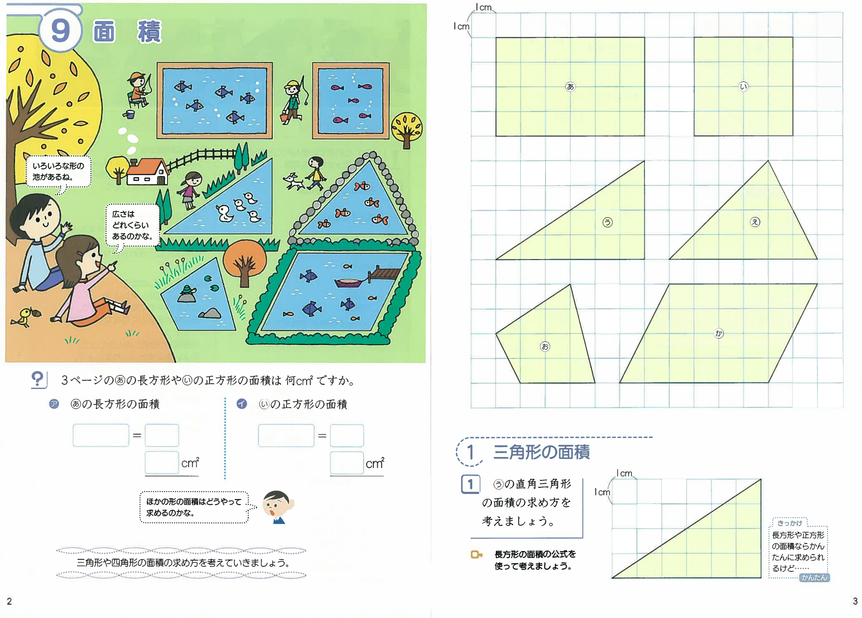
　　　　　　　　発表

３．実行　　　　練り上げ（集団解決）

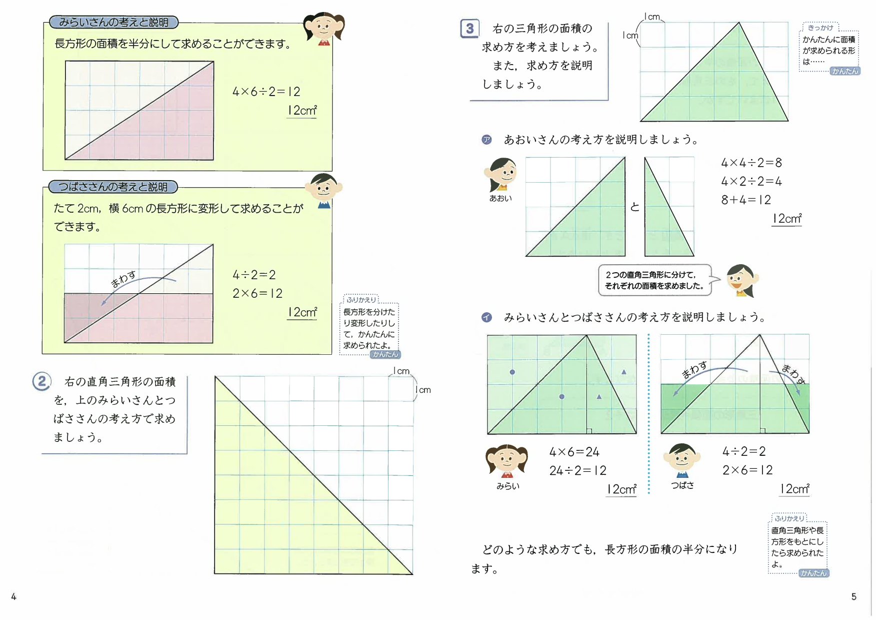
４．ふり返り　　まとめ

- **（解決過程に対する指摘）混沌に見える問題解決過程にも，解決行動・解決者の目標・思考の様態等によって，ある種の活動の相や段階を見ることができる**
- **（素朴な仮説）問題解決過程にある種の段階があるなら，授業をその段階に沿うように編成することが，授業を問題解決的にすることに繋がり，ひいては学習者の問題解決能力を伸ばすことに繋がるだろう**
- **そして，教師にとっては，授業の型があるとありがたい（？）**

問題解決の過程を踏まえた教科書紙面



問題解決の過程を踏まえた教科書紙面



みらいさんの考えと説明

長方形の面積を半分にして求めることができます。

4×6÷2＝12

12cm²

つばささんの考えと説明

たて 2cm，横 6cm の長方形に変形して求めることができます。

まわす

4÷2＝2

2×6＝12

12cm²

ふりかえり

長方形を分けたり変形したりして，かんたんに求められたよ。

かんたん

② 右の直角三角形の面積を，上のみらいさんとつばささんの考え方で求めましょう。

1cm

1cm

4

3 右の三角形の面積の求め方を考えましょう。

また，求め方を説明しましょう。

1cm

1cm

きっかけ

かんたんに面積が求められる形は……

かんたん

ア あおいさんの考え方を説明しましょう。

あおい

と

4×4÷2＝8

4×2÷2＝4

8＋4＝12

12cm²

2つの直角三角形に分けて，それぞれの面積を求めました。

イ みらいさんとつばささんの考え方を説明しましょう。

みらい

4×6＝24

24÷2＝12

12cm²

まわす

まわす

つばさ

4÷2＝2

2×6＝12

12cm²

ふりかえり

直角三角形や長方形をもとにしたら求められたよ。

かんたん

どのような求め方でも，長方形の面積の半分になります。

5

■３つのタイプの問題解決指導(1)

(A) 方法型

- 目標は，今まで通りのカリキュラム内容の習得（知識理解・技能習得・概念形成）が主
- 問題解決の過程を意識した授業構成（ex. 問題提示→自力解決→練り上げ→まとめ）
- 既存の目標達成の為に，既存の授業形態を問題解決の過程に沿う形に改編したもの
- 扱う問題は，教科書に準拠した単元内容に沿うもの
- **通常の授業における目標**（例えば，概念形成や知識理解等）**と「問題解決能力の育成」という目標との折衷**

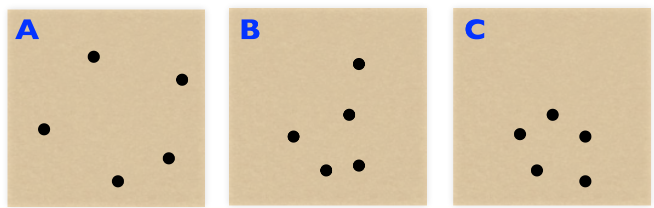
■３つのタイプの問題解決指導(2)

(B) 特設型・目的型

- 目標は，問題解決能力の育成をダイレクトに狙う
- 授業形態は特別に設定された授業展開（目的に沿った授業展開を行うために，特設的なものになりがち）
  - 数学的モデリング
  - オープンエンド・アプローチ
  - ストラテジー指導
- **問題解決能力育成という目的に添うような問題を扱う**
  - 現実的な問題（ex. 買い物問題）
  - ノン・ルーチンな問題（ex. 電話線問題）
  - 総合的応用問題（ex. フェルミ推定問題）

オープンエンド・アプローチ

A,B,Cの３人でおはじき遊びをしたら，下の図のようになりました。この遊びでは，落としたおはじきのちらばりの小さい方が勝ちとなります。



(1) この例では、おはじきのちらばりの程度は，A,B,C の順にだんだん小さくなっているといえそうです。このような場合のちらばりの程度を数で表わす仕方を，幾つか考えてください。

ストラテジー指導

ストラテジー(strategy)

<u>本来の国語辞典的な意味</u>

戦略(strategy)：戦争・闘争のはかりごと。戦争の総合的な準備・計画・運用の方策。「—を立てる」「企業—」▽戦術より大局的なものを言う。

戦術(tactics)：戦闘を行う上の方策。転じて、ある目標を達するための方策。「牛歩—」《岩波国語辞典》

<u>数学教育における「問題解決ストラテジー」の意味（「方略」という用語を使う）</u>

必ずしも解決を保証するわけではないが，問題をよりよく理解したり，解決を進展させたりする上で大きな助けとなる一般的な手順・方策(作戦)・技術などのこと。

３つの問題解決指導に関するまとめ

	主目標	内容	方法
方法型	学習指導要領に示された内容に関する概念形成・知識/技能獲得	学習指導要領に示された内容(教科書の内容)	問題解決過程に沿った授業過程で指導
特設型	問題解決能力の育成	問題解決能力の育成に寄与する内容(ex. 投げ入れ教材，ノンルーチンな問題)	・ストラテジー指導 ・オープンエンドアプローチ ・ノンルーチンな問題/数学的モデリングの指導
設定型	問題解決(設定)能力の育成	問題作り	・問題から問題へ ・条件から問題へ ・What-if-not?の適用 ・現実から問題へ

ストラテジー指導

<u>鶴亀算</u>

鶴と亀が合わせて10匹いる。足は合わせて32本だというが，鶴と亀は，それぞれ何匹ずついるのだろうか？

下のストラテジーの適用により，問題解決は(あるいは問題理解)は進展するか？

・パターンを探せ　　・図をかけ
・整理されたリストをつくれ　　・逆向きに考えよ
・一般化して考えよ　　・簡単な場合/数で考えよ
・推測して確かめよ(Guess & Check)　　etc.

令和２年度前期　数学科教育CIII

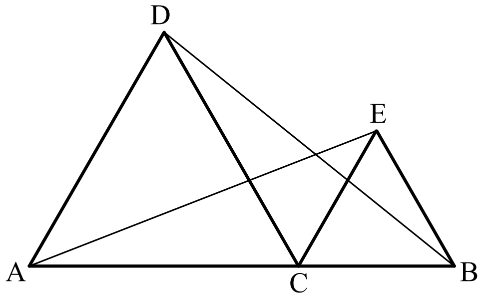
学習指導と問題解決(3)(4)

問題設定（問題づくり）：その1+2

問題

線分AB上に点Cをとり，AC, CBを，それぞれ１辺とする正三角形△ACD，△BCEをABの同じ側に作る。

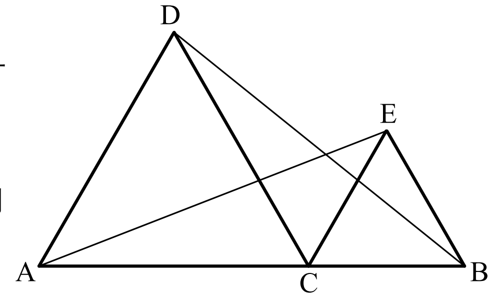
このとき，AE = DB を証明せよ。



原問題

線分AB上に点Cをとり，AC, CBを，それぞれ１辺とする正三角形△ACD，△BCEをABの同じ側に作る。

このとき，AE = DB を証明せよ。



仮定	(1) 線分AB上に点Cがある
	(2) △ACD，△BCEは正三角形
	(3) △ACD，△BCEは線分ABの同じ側にある
結論	AE = DB

■問題設定（問題作り）

- 目標は，問題解決能力（及び問題設定能力）の育成
- 授業形態は，（特設的になりがちな）「問題作り」
- 「問題作り」とは，問題解決を広義に捉えた場合に，与えられた問題を解くこととは別に，**学習者自身が問題を作ること**
  - 問題から問題へ（問題の作りかえ等）
  - 条件から問題へ（式から問題へ，場面から問題へ）
  - 現実場面から問題へ
- 問題作りでは，特に「問題から問題へ」の形態において，What-if-not？方略を使う（意識させる）ことが多い

では，具体的な授業のパターンは？

もう少し一般的な「問題から問題へ」のパターン

■典型的な授業過程

(1) 原問題の解決

(2) 問題づくり

(3) つくった問題の発表と分類・整理

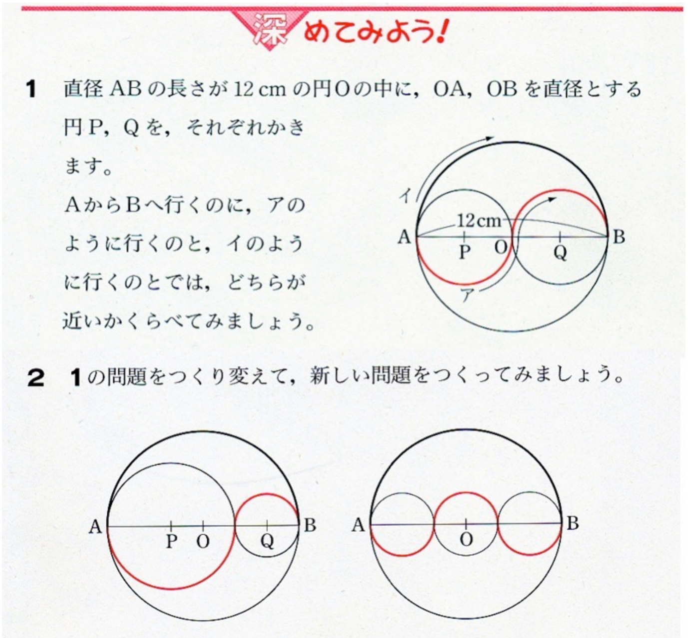
(4) つくった問題の解決

(5) まとめと発展

竹内芳男・澤田利夫(編著)(1984).『問題から問題へ：問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善』. 東洋館出版社.

問題から問題へ（典型例２）

啓林館(H14版)
『数学２年』，
pp.26-27


深めてみよう!

1 直径 AB の長さが 12 cm の円Oの中に，OA，OB を直径とする円 P，Q を，それぞれかきます。
AからBへ行くのに，アのように行くのと，イのように行くのとでは，どちらが近いかくらべてみましょう。

2 **1**の問題をつくり変えて，新しい問題をつくってみましょう。

条件から問題へ（場面から問題へ）

④ えを 見て，たし算や ひき算の もんだいを つくりましょう。

啓林館（H14版）
『算数２年上』,p.71

①〜③までは「変化」や「比較」の問題を扱い，④で問題作り

→ **場面からの問題作り**

場面(条件)から問題へ（但し，かなりオープン）

1 だいちさんと ひなたさんは，上の 絵を 見て，かけ算に なる もんだいを つくりました。
下の □に あてはまる 数を かいて，もんだいを かんせいさせましょう。

② みの まわりから かけ算に なる もんだいを つくって，カードに かきましょう。
また，つくった もんだいを はっぴょうしましょう。

啓林館(H27版)
『算数２年下』，
p.20

② 身の回りからかけ算になる問題を作って，カードに書きましょう。
また，作った問題を発表しましょう。

条件からの問題づくりだが，「現実から問題へ」に近い

What-if-not ? 方略

- **What if not ? : 直訳「〜でなければどうか？」**
- 学習者の自由な問題設定を許容すると，授業の拡散を招きかねないし，そもそも柔軟性・独創性のある問題を作るためには，それなりの経験も必要。
- What-if-not ?方略とは，問題の条件を変えることで<u>問題場面を組織的に変化させ</u>，そこから組織的な問題設定を行う方法として提案された問題設定のためのストラテジー。
  1. そのシチュエーションの属性を挙げよ
  2. その中の１つの属性を変えてみよ
  3. 新しくなったシチュエーションから問題を設定せよ

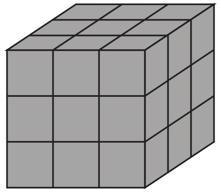
「What-if-not ? 方略」の練習１

- **What if not ? 方略の具体的プロセス**
  1. そのシチュエーションの属性を挙げよ
  2. その中の１つの属性を変えてみよ
  3. 新しくなったシチュエーションから問題を設定せよ

表面を黒く塗った立方体が，下図のように一辺の長さが1/3になるように小さな立方体に切り分けてある。

(1) この問題場面から生じる問題を設定せよ。

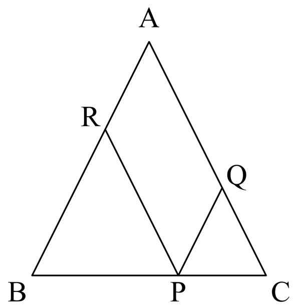
(2) (1)の問題場面に What if not ?を適用し，問題場面を色々作り変え、新たな問題設定を考え、実際に解決してみよ。



「What-if-not ? 方略」の練習２

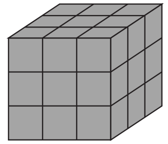
右図のように二等辺三角形ABCの底辺BC上に点Pをとり，Pを通りAB，ACに平行線を引き，AC，ABとの交点をそれぞれQ，Rとする。

このとき，RP+PQが一定であることを証明せよ。



表面を黒く塗った立方体が，下図のように一辺の長さが1/3になるように小さな立方体に切り分けてある。

(1) この問題場面から生じる問題を設定せよ。



問題場面の属性

(a) 最初の立体は立方体

(b) 立体の表面が黒く塗られている

(c) 一辺の長さが1/3になるように小立方体に切り分けられている

問題設定の意義（及び利点と欠点）

良い問題をつくるのはそれなりに難しいが，問題設定の授業を通して問題分析能力がつき，ひいては問題解決能力がつくことが期待される（そもそも，普通の問題解決の中でも，解決者は問題を自分が理解できるような問題に作り変えているはずである）。

利点と欠点

○ 評価に役立つ（作られた問題の量だけでなく質も考慮することが大切）

○ 創造性の基礎を培う

○ 到達度の低い生徒でも授業に参加しやすい

× あまりに自由な問題設定は授業の拡散を招く（特に「現実から問題へ」）

× 柔軟性や独創性のある問題を作るには，それなりの経験が必要

× 授業者にノウハウ・経験の蓄積が少ない