1　$\cos(\pi/5)$ の求め方

$x=\cos\dfrac{\pi}{5}$ とおく。$z=e^{\pi i/5}=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ とおくと,

$$2x=z+z^{-1},\qquad 4x^2=(z+z^{-1})^2=z^2+z^{-2}+2. \tag{1.1}$$

$z^5=e^{\pi i}=-1$ であるから,

$$z^2-z+1-z^{-1}+z^{-2}=z^{-2}\bigl(z^4-z^3+z^2-z+1\bigr)=z^{-2}\frac{z^5+1}{z+1}=0. \tag{1.2}$$

式 (1.1) を式 (1.2) に代入すると,

$$4x^2-2x-1=0. \tag{1.3}$$

2 次方程式の解の公式より, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.　$\cos\dfrac{\pi}{5}>0$ であるから, $\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

2　$\cos(\pi/7)$ の求め方

$x=\cos\dfrac{\pi}{7}$ とおく。$z=e^{\pi i/7}=\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$ とおくと,

$$\begin{gathered}2x=z+z^{-1},\qquad 4x^2=(z+z^{-1})^2=z^2+z^{-2}+2,\\ 8x^3=(z+z^{-1})^3=z^3+z^{-3}+3\bigl(z+z^{-1}\bigr).\end{gathered} \tag{2.1}$$

$z^7=e^{\pi i}=-1$ であるから,

$$\begin{aligned}z^3-z^2+z-1+z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}&=z^{-3}\bigl(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1\bigr)\\&=z^{-3}\frac{z^7+1}{z+1}=0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

式 (2.1) を式 (2.2) に代入すると,

$$8x^3-4x^2-4x+1=0. \tag{2.3}$$

$x=u+\dfrac{1}{6}$ とおくと,

$$u^3-\frac{3\cdot 7}{6^2}u+\frac{7}{6^3}=0. \tag{2.4}$$

公式. 3 次方程式 $u^3-3au+b=0$ の解は,

$$u=\Bigl(-b+\sqrt{b^2-4a^3}\Bigr)^{1/3}+\Bigl(-b-\sqrt{b^2-4a^3}\Bigr)^{1/3}.$$

式 (2.4) に上の公式を適用すると,

$$\begin{aligned}u&=\left(\frac{-7/6^3+\sqrt{7^2/6^6-4\cdot 7^3/6^6}}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{-7/6^3-\sqrt{7^2/6^6-4\cdot 7^3/6^6}}{2}\right)^{1/3}\\&=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{7}{2}\bigl(-1+3\sqrt{3}i\bigr)\right)^{1/3}+\left(\frac{7}{2}\bigl(-1+3\sqrt{3}i\bigr)\right)^{1/3}\right\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{7} &= \frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{7}{2}\bigl(-1+3\sqrt{3}i\bigr)\right)^{1/3}+\left(\frac{7}{2}\bigl(-1+3\sqrt{3}i\bigr)\right)^{1/3}\right\} \\
&= \frac{1}{6}\left\{1+\sqrt{7}\left(\frac{-1+3\sqrt{3}i}{2\sqrt{7}}\right)^{1/3}+\sqrt{7}\left(\frac{-1-3\sqrt{3}i}{2\sqrt{7}}\right)^{1/3}\right\} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+2\sqrt{7}\cos\frac{\alpha}{3}\right), \qquad \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\sqrt{7}}\right).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$